This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

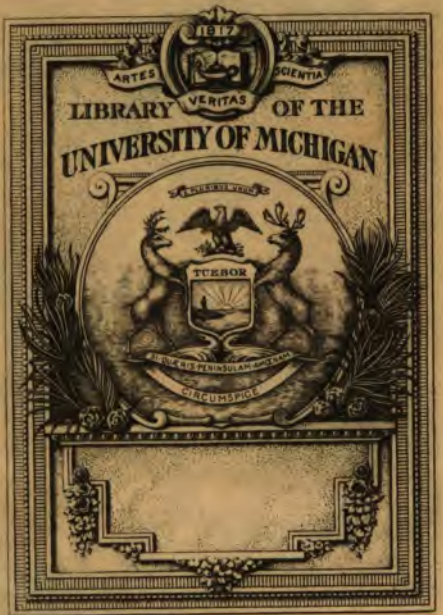
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

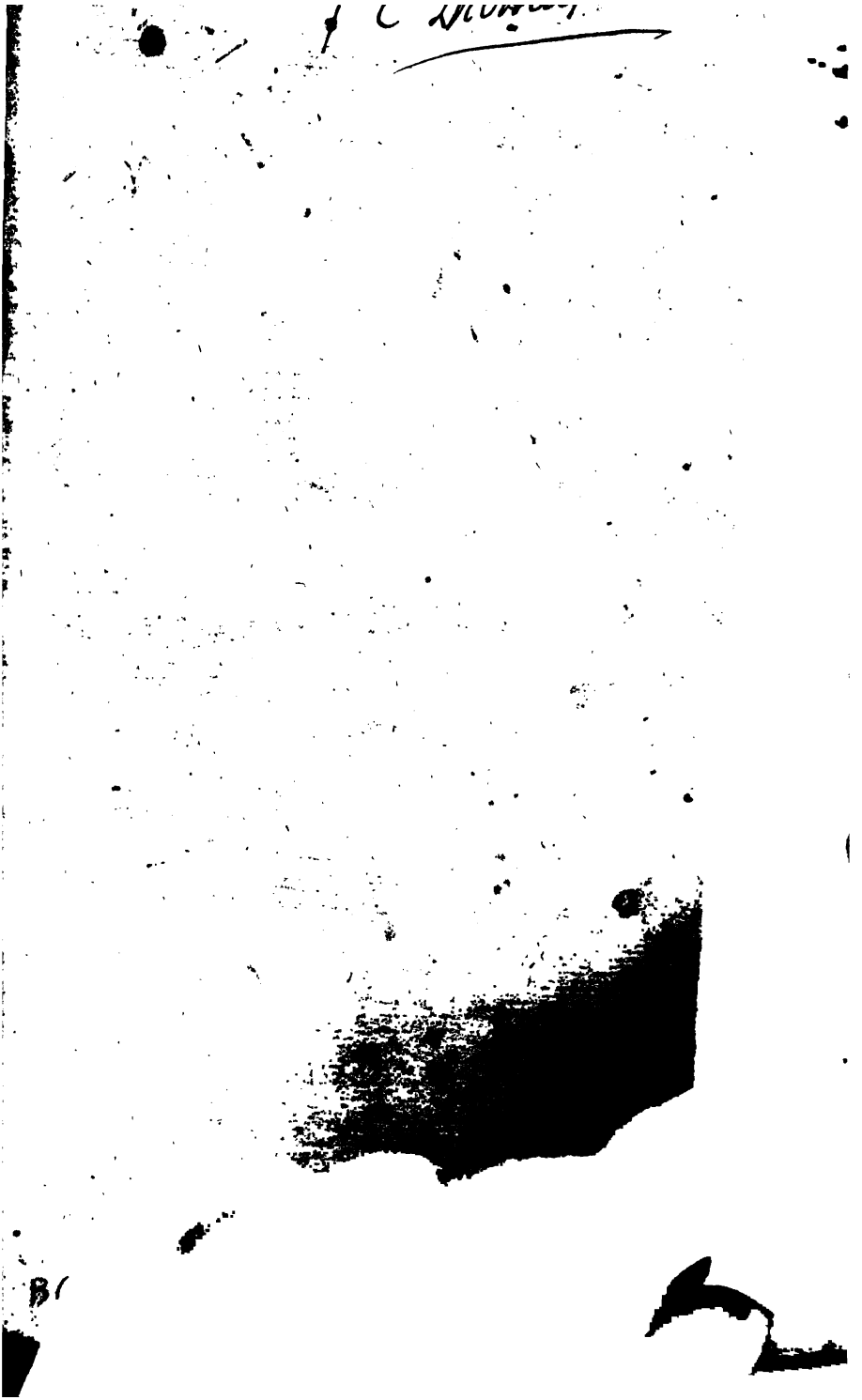


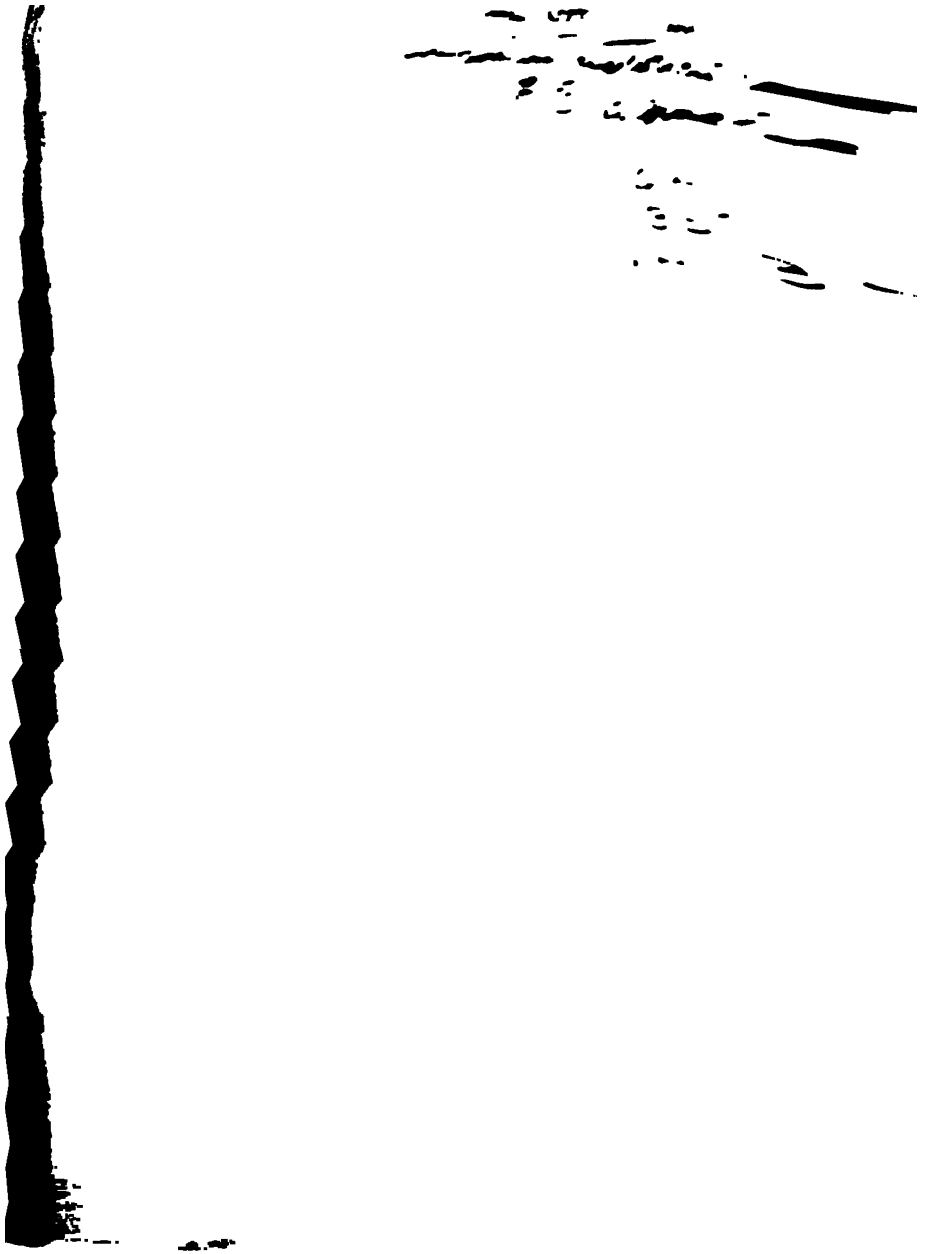
THE GIFT OF
Prof. Louis Karpinski

E Thomas

Fine work. Many important historical notes
L C Karpinski

QA
35
.L134





TRAITÉ
DES
SECTIONS CONIQUES,
ET
AUTRES COURBES ANCIENNES,

Appliquées ou appliquables à la Pratique de différens Arts; tels que l'Artillerie, l'Architecture, la Conſtruction des Miroirs ardens, des Téleſcopes, des Lunettes, des Porte-voix, des Échos, des Cornets acouſtiques, ou des Inſtrumens qui ſervent à corriger les défauts de l'Ouïe. &c.

Avec un petit Traité de la Cycloïde, où l'on fait voir comment cette Courbe a contribué à perfectionner les Horloges à Pendule.

Le tout enrichi de Notes ou de Diſſertations Hiſtoriques & Critiques ſur l'origine & le progrès des Sciences & des Arts, qui ſont entrés dans le Plan de cet Ouvrage.

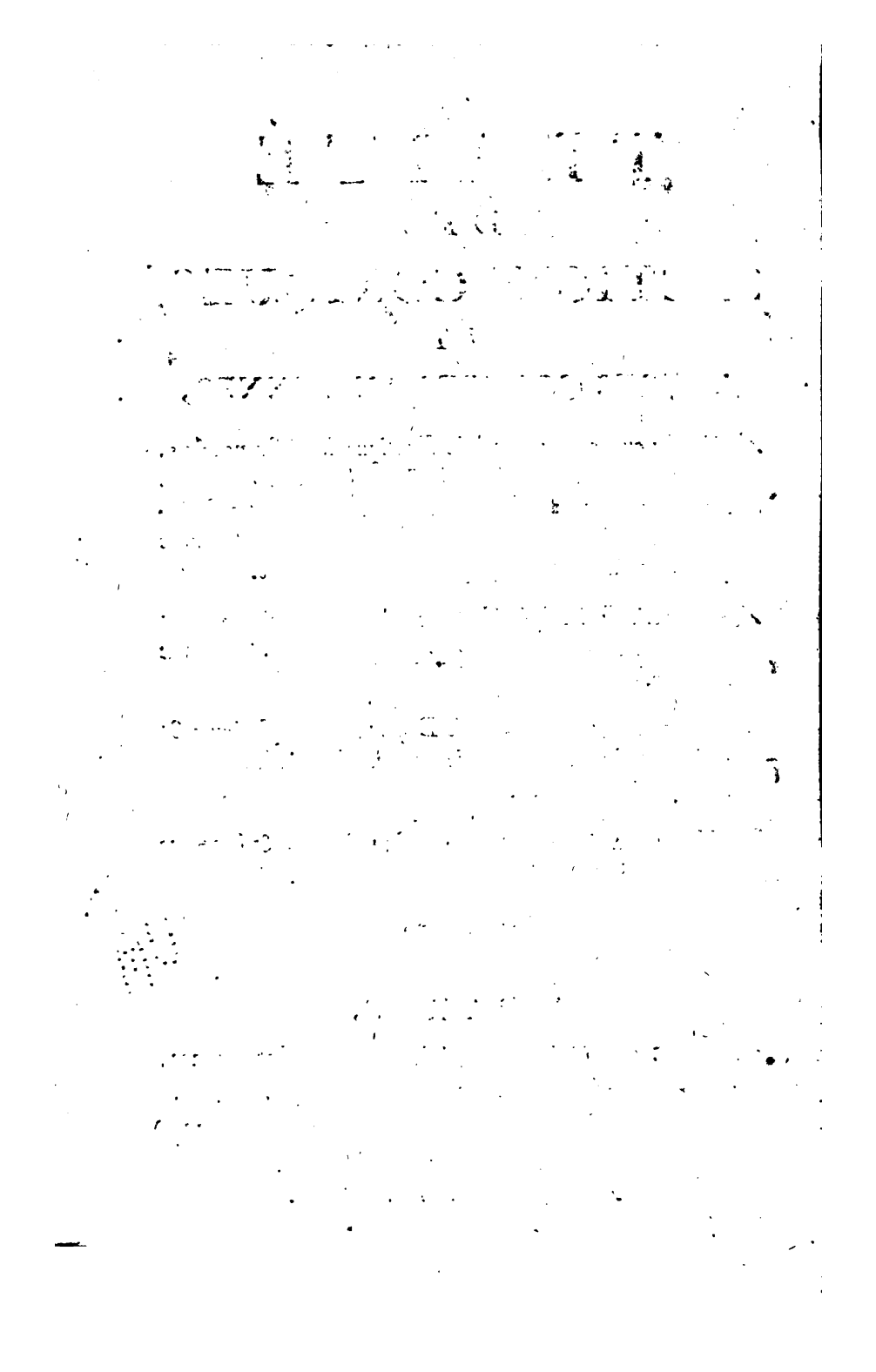
Par M. DE LA CHAPELLE, Cenſeur Royal, & Membre de la Société Royale de Londres.

A PARIS,

CHEZ J. F. QUILLAU, Fils, Libraire, ruë Saint Jacques, vis-à-vis celle des Mathurins, aux Armes de l'Univerſité.

M. D. CC. L.

Avec Approbation & Privilège du Roy.



Gift
Professor Louis Karpinski
5-8-1934

A MONSEIGNEUR
LE RECTEUR
ET
A L'UNIVERSITÉ
DE PARIS.

6-26-34. 1492.1

MONSEIGNEUR & MESSIEURS,

On osoit à peine, il n'y a guères plus de vingt-cinq ans, dicter quelques Propositions de Géométrie dans les Leçons publiques,

dont Meſſieurs les Profeſſeurs de Philoſophie ſont chargés. Le nom ſeul de l'Algèbre cauſoit de l'étonnement, & cette Science étoit preſque regardée comme inacceſſible à l'eſprit humain.

Votre courage, MESSIEURS, en a inſpiré au Public. Il ſçait aujourd'hui par vos ſoins, que l'Algèbre & la Géométrie ſont deux Sciences, où règne la raiſon ſans mélange d'erreur. On n'y voit, à l'entrée ni ſur leur route, aucune des cauſes qui ont coutume d'en corrompre la pureté. Jamais on n'y entend parler de ſoupçons, de vrai-ſemblances, de craintes, de reſpect humain, de préjugés, de ſuperſtition.

Ce privilége, qui les rend déja ſi recommandables, n'eſt pas le ſeul qui ait attiré votre attention. Les hommes en ſociété augmentent leur bonheur, ou ſe ſoulagent dans leurs peines, en ſe communiquant réciproquement leur induſtrie. L'étendue de vos con-

noiſſances vous a fait appercevoir, que de bons principes faiſoient éclore cette induſtrie, hâtoient la peſante marche du tâtonnement, & faiſoient naître, dans le court intervale de quelques années, des reſſources que l'expérience de pluſieurs ſiécles n'avoit pas même fait ſoupçonner.

Convaincus que l'on en étoit principalement redevable à l'étude de l'Algèbre & de la Géométrie, vous l'avez introduite dans l'éducation publique; & le ſuccès en a été ſi rapide, que les Elémens de ces Sciences, qui conſommoient autrefois la vie entière d'un homme, ne ſont plus aujourd'hui chez vous que l'éxercice de quelques mois.

Il vous faut à préſent quelque choſe de plus profond. Vous avez ſenti qu'il eſt de l'intérêt de la Société, & de votre gloire, de faire monter l'éducation, dans vos célèbres Ecoles, au niveau des plus hautes Sciences. Cet Ouvrage ſur les Courbes, dont l'u-

tilité s'annonce par le Frontiſpice, vous a paru propre à y contribuer. Je l'ai entrepris par vos conſeils ; je ſouhaite qu'il ſoit exécuté ſelon vos vûes. Ce ſera un des meilleurs garans que je puiſſe avoir de l'approbation publique.

J'ai l'honneur d'être avec un très-profond reſpect,

MONSEIGNEUR & MESSIEURS,

Votre très-humble & très-obéiſſant Serviteur.
LA CHAPELLE.

TABLE
DES MATIÈRES
Contenues dans ce Volume.

PRÉFACE, dont la lecture eſt abſolument néceſſaire. Page xxxiij.

Du calcul des Puiſſances par leurs Expoſans. 1

Comment ſe fait la multiplication, ainſi que la diviſion de ces Puiſſances dont les Expoſans ſont poſitifs. Ce que c'eſt qu'une Puiſſance dont l'Expoſant eſt 0. 2

Comment un Expoſant poſitif peut devenir négatif, & réciproquement un négatif devenir poſitif, ſans changer la valeur de la Puiſſance. Comment l'on multiplie & l'on diviſe les Puiſſances à Expoſans négatifs. 3 & 4

Comment on Élève une Puiſſance quelconque à un degré quelconque, dont l'Expoſant eſt poſitif ou négatif. 4 & 5

Ce que c'eſt qu'une grandeur élevée à une Puiſſance négative. 6

Comment on peut, moyennant le calcul des Expoſans, délivrer du ſigne Radical une grandeur quelconque, ſans en changer la valeur. 7

Des Expoſans fractionnés. 7 & 8

Du Calcul des Radicaux.

Ce que c'eſt qu'un Radical. 8

Dans quel cas une grandeur peut être délivrée, en tout ou en partie, du ſigne Radical, ſans changer de valeur. 9 & 10

Comment une quantité peut devenir radicale, ſans changer de valeur. 10

Ce que c'eſt qu'un incommenſurable, *une grandeur* imaginaire, *& pourquoi l'on admet des* imaginaires *dans le calcul.* 11 & 12

Comment les imaginaires *peuvent devenir réelles, & en quoi elles différent du zéro.* 12

Comment on réduit un Radical à ſa plus ſimple expreſſion, & comment une Fraction ſous un ſigne Radical, peut être transformée en entier, ſans changer la valeur de la quantité radicale. 12 & 13

Pourquoi l'on peut transformer l'Expoſant d'un Radical en un autre, ſans changer la valeur de la quantité radicale. Et combien cela eſt commode, pour donner les mêmes Expoſans à différens ſignes radicaux. 14 & 15

Comment on peut découvrir, ſi des grandeurs incommenſurables priſes ſéparément, ſont ou ne ſont pas commenſurables entre elles. 15 & 16

De l'addition & de la ſouſtraction des Radicaux. 16 & 17

De la multiplication des Radicaux. 17, 18, 19 & 20

De la diviſion des Radicaux. 21, 22, 23 & 24

Élever une grandeur radicale à une Puiſſance donnée quelconque, & de l'extraction des Racines des Radicaux. 25 & 26

Comment on peut donner un ſeul ſigne radical à une grandeur, qui en auroit pluſieurs, ſans changer la valeur de cette quantité. 26 & 27

De la Parabole.

Génération du Cône, & des Sections coniques. De l'ancienneté de ces Courbes, & des principaux Auteurs qui en ont écrit 27 & 28

Prop. I. II. & III. *Une Perpendiculaire ſur un Plan, eſt néceſſairement Perpendiculaire ſur toutes les Lignes du Plan, menées par le pied de cette Perpendiculaire. Ainſi, d'un Point pris dans un Plan, on ne ſçauroit élever qu'une Perpendiculaire au-deſſus de ce Plan. Il n'eſt pas poſſible non plus d'abbaiſſer deux Perpendiculaires ſur un Plan, d'un même Point pris au-deſſus de ce Plan. C'eſt pourquoi la commune Section de deux Plans, Perpendiculaires ſur un troiſiéme Plan, eſt*

aussi perpendiculaire sur ce troisiéme Plan. 29 & 30
Génération de la Parabole. 30
PROP. IV. *Les quarrés des Ordonnées, dans la Parabole, sont entr'eux comme les Abciſſes correſpondantes.* 30, 31 & 32
Le Périmètre de la Parabole eſt une Courbe, qui s'éloigne toujours de plus en plus de ſon Axe. 33 & 34
Ce que c'eſt que le Paramètre *d'une Parabole, & comment on démontre que c'eſt une Ligne conſtante, qui ſe déduit des propriétés de cette Courbe.* 35 & 36
Le quarré d'une Ordonnée quelconque à la Parabole, eſt toujours égal au Rectangle du Paramètre par l'Abciſſe correſpondante. 36
PROB. *Une Ligne étant donnée pour le Paramètre d'une Parabole, conſtruire cette Courbe.* 38
PROB. *Une Parabole étant donnée avec ſon Sommet, trouver ſon Axe, ſon Paramètre, l'Ordonnée & la double Ordonnée égale au Paramètre.* 40
PROP. V. *Dans la Parabole, la ſous-Tangente eſt toujours double de l'Abciſſe correſpondante.* 41
Toute corde parallèle à la Tangente d'une Parabole eſt coupée en deux parties égales par une Ligne, tirée du Point de contingence parallèlement à l'Axe de la Courbe. 46
Mais cela ne ſera pas, ſi cette corde n'eſt point parallèle. C'eſt pourquoi, quand une corde eſt coupée en deux parties égales par un Diamètre, elle eſt néceſſairement parallèle à la Tangente au Sommet de ce Diamètre. Ainſi une Ligne, menée par le Sommet d'un Diamètre parallèlement à une des Ordonnées de ce Diamètre, eſt néceſſairement Tangente à la Courbe. 47
Une Ligne, menée par le milieu de deux cordes parallèles, eſt parallèle à l'Axe de la Courbe. 48
PROB. *Une Parabole étant donnée, trouver un de ſes Diamètres, ſon Axe & ſon Sommet.* 48
PROB. *Trouver le Diamètre qui paſſe par un Point donné d'une Parabole donnée, ainſi que la poſition des Ordonnées à ce Diamètre.* 49
PROB. *Tirer une* Tangente *par un Point quelconque d'une Parabole donnée, ſans avoir recours à ſon Axe.* 49

PROP. *Une Parabole étant donnée, trouver un Diamètre qui faſſe avec ſes Ordonnées un Angle égal à un Angle obliquẽ donné.* 42
PROP. XII. *Les quarrés des Ordonnées à un Diamètre quelconque d'une Parabole, ſont entr'eux comme les Abciſſes correſpondantes.* 50
Ce que c'eſt que le Paramètre d'un Diamètre. 51
Le quarré d'une Ordonnée quelconque à un Diamètre eſt égal au Rectangle de l'Abciſſe par le Paramètre de ce Diamètre. 51
PROB. *Une Ligne indéfinie, dont l'origine eſt déterminée, étant donnée pour le Diamètre d'une Parabole, ainſi que le Paramètre de ce Diamètre, décrire une Parabole, de maniere que l'Angle des Ordonnées à ce Diamètre, ſoit égal à un Angle donné.* 52
PROP. préparatoire pour la Quadrature de la Parabole. *Inſcrire dans un Segment de Parabole, le plus grand Triangle poſſible.* 55
Le plus grand Triangle inſcriptible à un Segment de Parabole, vaut toujours plus de la moitié du Segment où il peut être inſcrit. 56
Progreſſion d'où l'on déduit la Quadrature de la Parabole, ſuivant la Méthode d'Archiméde. 57
Quadrature de cette Courbe. 57 & 58
LEMME *pour la Quadrature de la Parabole, par une Méthode générale & beaucoup plus ſimple que la précédente.* 58 & 59
Cette Quadrature eſt expliquée & démontrée. 59, 60 & 61
Cubature du Paraboloide ou évaluation de ſa ſolidité. 61 & 62
PROP. XIV. *Le quart du Paramètre d'un Diamètre quelconque, eſt égal au Paramètre de l'Axe, joint à l'Abciſſe de l'Axe déterminée par l'Ordonnée, menée du Sommet de ce Diamètre.* 63
PROP. XV. *Si au Sommet d'un Diamètre quelconque on tire une Tangente, & que l'on faſſe l'Angle* TMF = *l'Angle* TMQ, *le côté* MF *ira rencontrer l'Axe en un Point* F, *tel que* MF = *le quart du Paramètre de ce Diamètre.* 63 & 64
PROP. XVI. *La diſtance du Point* F *au Sommet de l'Axe d'une Parabole, eſt égale au quart du Paramètre de l'Axe.* 65

PROP. XVII. *Le Point* F *eſt un* Foyer. 65
Des rayons, émanés du Foyer d'une Parabole, ſont réfléchis par la Courbe parallèlement à ſon Axe. 66
PROB. *Trouver le Foyer d'une Parabole donnée.* 66
Le Paramètre d'un Diamètre quelconque, eſt toujours quadruple de la diſtance du Sommet de ce Diamètre au Foyer de la Parabole. Ainſi le Foyer d'une Parabole étant donné, avec le Sommet de cette Courbe, on aura facilement le Paramètre d'un Diamètre quelconque. 66
PROB. *Le Foyer & l'Axe d'une Parabole étant donnés, tirer une Tangente en un Point quelconque de la Courbe.* 67
Si d'un Point de contingence l'on méne une Ligne au Foyer, cette Ligne ſera égale à la diſtance du Foyer au Point où la Tangente rencontre l'Axe. 67
Ce que c'eſt qu'un Rayon vecteur. 67
Si aux Points M, *m, où ſe trouve un corps qui ſe meut dans une Parabole, on tire des Tangentes; & que du Foyer on abbaiſſe des Perpendiculaires ſur ces Tangentes, ces Perpendiculaires ſeront entr'elles comme les Racines quarrées des Rayons vecteurs.* 67 & 68
Ce que c'eſt qu'une Directrice. 68
L'Ordonnée au Foyer eſt égale à la moitié du Paramètre de l'Axe. 68
La Perpendiculaire au Sommet de l'Axe eſt Tangente à la Parabole. 69
PROB. *Avec le Paramètre & la Directrice d'une Parabole, conſtruire cette Courbe.* 69

Uſage de la Parabole dans le Jet des Bombes.

Origine de cette Science. 71
Loix du mouvement découvertes par Galilée. 1°. *Les eſpaces, qu'un corps parcourt en tombant, ſuivent la progreſſion Arithmétique des nombres impairs,* 1, 3, 5, 7, *&c.* 2°. *Les eſpaces parcourus ſont entr'eux, comme les quarrés des tems employés à les parcourir. Ainſi connoiſſant le tems de la chute d'un corps, on découvre la hauteur d'où il eſt tombé; & con-*

noiſſant la hauteur de la chute, on en découvre le tems. 3°. *Les viteſſes acquiſes ſont comme les tems employés à parcourir des eſpaces.* 4°. *Les eſpaces ſont comme les quarrés des viteſſes acquiſes à la fin de ces eſpaces; & les viteſſes acquiſes ſont entr'elles, comme les Racines quarrées des eſpaces.* 5°. *Un corps mû uniformément avec la viteſſe acquiſe à la fin du premier inſtant de ſa chute, parcourt dans un tems égal au premier un eſpace double du premier.* 6°. *Un corps repouſſé en haut perpendiculairement à l'horiſon avec la viteſſe acquiſe à la fin de ſa chute, doit néceſſairement, dans un tems égal à celui de ſa chute, remonter au même Point d'où il a commencé à deſcendre.* 72, 73, 74, 75, 76 & 77

Un corps jetté obliquement à l'horiſon, & abandonné à lui-même, décrit une Parabole, en ſuppoſant qu'il n'éprouve aucun obſtacle. 77

PROB. *De quelle hauteur doit tomber un mobile, pour avoir à la fin de ſa chute une force, qui lui faſſe parcourir uniformément un eſpace, dans le même tems que ſa peſanteur lui fait parcourir une hauteur verticale connue?* 79

Ce que c'eſt que la Ligne de hauteur. 82

*Ce que l'on entend par l'*Amplitude *d'une Parabole.* 83

*Ce que c'eſt que l'*Amplitude *d'une Parabole au niveau de la Batterie, ainſi qu'un* Angle d'élévation. 85 & 86

PROP. très-eſſentielle. *Les étendues de différens jets au niveau d'une Batterie, ou autrement, les Amplitudes de deux Paraboles, décrites par un mobile, chaſſé avec une même force, ſuivant des directions obliques à l'horiſon, ſont entr'elles comme les Sinus du double des Angles d'élévation.* 86

Ainſi le plus grand de tous les jets eſt à l'élévation de 45 degrés; & c'eſt alors que l'on tire à toute volée. 86 & 87

Les Amplitudes ſont égales, quand le mobile eſt jetté ſous des Angles d'élévation également éloignés de 45 degrés. L'un ou l'autre de ces Angles n'eſt pourtant pas indifférent dans la Pratique. 87

La portée ſous l'Angle de 15 degrés, eſt égale à la moitié de la plus grande Amplitude. Importance de cette vérité dans le calcul des Tables pour le jet des Bombes. 88

La Ligne de hauteur eſt toujours la moitié de la plus grande portée ; & une bombe ne ſçauroit s'élever plus haut que la Ligne de hauteur. 89

Les Sommets de toutes les Paraboles, décrites par un mobile avec une même force, ſuivant toutes les inclinaiſons poſſibles, ſe trouvent dans une Ellipſe, dont le grand Axe, égal à la plus grande portée, eſt double du petit. 90

Ce que l'on entend par un coup de volée, *&* portée de but en blanc. 91

La portée de but en blanc *d'un mobile, eſt égale au double de la moyenne proportionelle géométrique entre la Ligne de hauteur, & la diſtance du mobile à l'horiſon.* 91

Comparaiſon de la Synthèſe à l'Analyſe. 93

Pratique du jet des bombes. 1°. *Trouver l'Amplitude d'un jet, dont l'étendue eſt au niveau des Batteries, & l'Angle d'élévation donné.* 2°. *Trouver l'Angle d'élévation, que l'on doit donner à un* Mortier, *pour chaſſer une bombe à une diſtance déterminée.* 3°. *Déterminer la diſtance où la piéce doit porter ſon boulet, quand on la tire de* but en blanc, *étant à une hauteur connue au-deſſus du niveau de la campagne.* 4°. *Trouver le Point dans lequel une bombe rencontrera un Plan incliné au-deſſus ou au-deſſous de l'horiſon, la piéce étant tirée ſous un Angle donné.* 5°. *Déterminer l'Angle d'élévation néceſſaire, pour que la bombe paſſe par un Point déterminé ſur un Plan, incliné au-deſſus ou au-deſſous de l'horiſon.* 94, 95, 96, 97, 98

PROB. *L'Amplitude d'une Parabole étant donnée, avec l'Angle d'élévation de ſon mortier, trouver la plus grande hauteur, à laquelle la bombe doit s'élever.* 102

PROB. *Quel doit être l'Angle d'élévation d'un mortier, pour qu'une bombe s'élève à une hauteur donnée?* 103

PROB. *Comment peut-on donner à un mortier une inclinaiſon déterminée?* 103

Réponſe aux objections faites contre cette Théorie du jet des bombes. Expériences qui la confirment. 104, 105, 106, 107

Uſage de la Parabole, pour calculer l'excavation des Mines. Ce que c'eſt qu'une Mine. Combien M. de Vallière, *actuellement Lieutenant-Général, a contribué à les perfectionner.* 108, 109, 110, 111

Manière de construire artificiellement un Conoïde, ou un solide quelconque convexe ou concave. Combien doivent être suspectes les machines dont on se sert, pour décrire les Courbes par un mouvement continu. 112, 113

Usage de la Parabole dans la construction des Porte-voix.

Ce que c'est qu'un Porte-voix. Principes d'expérience pour sa construction. 113, 114

Le Porte-voix de forme cylindrique, ou conique, ainsi qu'on le construit communément, n'est pas aussi parfait qu'il pourroit l'être. 115

La construction en forme de cône est préférable à la cylindrique; mais la parabolique paroît être la plus avantageuse. 116

Dissertation sur la découverte du Porte-voix.

Son invention est fort ancienne. Le P. Kircher, Jésuite, paroît être le premier en Europe, qui l'a retrouvé. Plagiat du Chevalier Morland, Anglois. 117, 118 & 119

Usage de la Parabole dans la construction des instrumens acoustiques, ou des cornets propres à corriger les défauts de l'ouie. 119

Usage de la Parabole dans la construction des miroirs brûlans par réflexion. 120

Comment on peut convertir un Foyer en Ligne brûlante, & pourquoi l'on a soutenu qu'avec des miroirs Paraboliques, on pouvoit porter l'incendie à une distance quelconque. 121 & 122

Lanterne parabolique, avec laquelle on peut tirer des petits caractères à une très-grande distance. 122 & 123

Les jambages des cheminées devroient être construits paraboliquement. Les appartemens en seroient beaucoup mieux échauffés. Moyen simple de perfectionner cette commodité. 124

Expériences de Mrs Dufay & de Mairan ſur deux miroirs brûlans paraboliques. 125
Echo parabolique, qui ſemble tenir du prodige. 125 & 126
Le miroir parabolique convexe à la propriété, comme le concave, de rendre parallèles des rayons de lumière. 127
Uſage de la Parabole pour la duplication du Cube. 127

De l'Ellipſe.

PROP. I. *Si une figure Curviligne eſt telle que les quarrés des Ordonnées, perpendiculaires ſur une de ſes cordes, ſoient toujours égaux aux produits des Segmens de cette corde, faits par ces perpendiculaires, cette figure eſt un Cercle.* 129
Ce que c'eſt qu'une Section anti-parallèle *ou* ſous-contraire. 130
PROP. II. *Si on coupe un cône ſcalène anti-parallèlement à ſa Baſe, la ſurface qui en naîtra ſera un Cercle.* 130
PROP. III. *Mais, ſi le cône eſt coupé de manière que la Section ne ſoit ni parallèle ni anti-parallèle à ſa Baſe, cette coupe ne ſera pas un Cercle.* 131
*Définition de l'*Ellipſe *& de ſes principales Lignes.* 133
PROP. IV. *Dans une Ellipſe, les quarrés des Ordonnées à l'Axe ſont entr'eux comme les Rectangles des Segmens de cet Axe, correſpondans à chaque Ordonnée.* 135
La converſe de la propoſition précédente eſt fauſſe. 134
PROP. V. *Le quarré d'une Ordonnée quelconque au grand Axe, eſt au Rectangle des Segmens correſpondans de cet Axe, comme le quarré du petit Axe eſt au quarré du grand.* 134
Le quarré d'une Ordonnée au petit Axe, eſt au Rectangle des Segmens correſpondans de cet Axe, comme le quarré du grand Axe eſt à celui du petit. 137
Définition des Axes conjugués. 137
Si les abſciſſes d'une Ellipſe ſont égales, les Ordonnées correſpondantes le ſont auſſi. Et réciproquement l'égalité des Ordonnées fait celle des Abciſſes correſpondantes. 138
Quoiqu'un cône ſoit plus grêle vers ſon Sommet que vers ſa Baſe, l'Ellipſe qui eſt une coupe de haut en bas de ce ſolide,

n'eſt pourtant pas plus groſſe à ſon extrêmité inférieure qu'à ſa ſupérieure. 139
Définition du Paramètre de l'Ellipſe. 139
Pourquoi l'Ellipſe a été ainſi appellée. 141
PROP. VI. *Si des Foyers d'une Ellipſe, l'on mène deux Lignes à un même Point du Périmètre de cette Courbe, leur ſomme ſera toujours égale au grand Axe de la figure.* 141
Comment on a la Tangente d'une Ellipſe. 143
Comment on trouve que cette Courbe a des Foyers. 144
Si un Angle, formé par deux Lignes menées des Foyers de l'Ellipſe à un même Point de ſon Périmètre, eſt coupé en deux parties égales par une Ligne, cette Ligne ſera perpendiculaire à la Courbe, ou à ſa Tangente en ce Point. 145
Propoſition très-utile dans la Dioptrique. 145 & 146
Toute Tangente à l'Ellipſe, en quelque Point différent des extrêmités des Axes, eſt néceſſairement déterminée à rencontrer le grand Axe. 147
L'Ordonnée à l'un des Foyers de l'Ellipſe, eſt égale à la moitié du Paramètre du grand Axe. 147
Trouver la valeur de la ſous-Tangente de l'Ellipſe, par une méthode nouvelle & générale de mener les Tangentes des Courbes. 150
Pourquoi l'on peut ſe ſervir indifféremment du grand & du petit Axe de l'Ellipſe, pour trouver la Tangente. 154
Quatre vérités néceſſaires pour l'intelligence des Inſtitutions Newtoniennes *de M. Sigorgne.* 154, 155, 156, 157, 158, 159
PROB. *Deux Lignes étant données pour les deux Axes d'une Ellipſe; en trouver les* Foyers *& conſtruire cette Courbe.* 160
LEMME. *Si l'on décrit un Cercle ſur le grand Axe d'une Ellipſe, les Ordonnées de l'Ellipſe ſeront proportionelles aux Ordonnées correſpondantes du Cercle.* 162
L'Aire d'une Ellipſe eſt à la ſurface du Cercle décrit ſur ſon grand Axe, comme le petit Axe de cette Courbe eſt à ſon grand Axe. 163

Si

Si l'on ſçavoit diviſer un Cercle en raiſon donnée, par une Ligne tirée d'un point de ſa ſurface, différent du centre, à ſa circonférence, on pourroit auſſi diviſer l'Ellipſe en raiſon donnée, par une Ligne menée de l'un de ſes Foyers. 164
Réſolution de ce Problême très-ſimple & fort approché. 165
La ſurface d'une Ellipſe eſt égale à celle d'un Cercle, dont le Diamètre eſt moyen proportionel géométrique entre le grand Axe & le petit Axe. 166
Les Aires des Ellipſes ſont entr'elles, comme les produits de leurs Axes. 166
Ce que c'eſt qu'une Ellipſoïde. 166
Comment on en trouve la ſolidité. 167
Définition des Diamètres conjugués de l'Ellipſe. 170
Ce qu'il faut faire pour les trouver, quand ils ſont égaux. 171
Comment on détermine les deux Axes d'une Ellipſe, quand on en a deux Diamètres conjugués inégaux. 174
PROP. XIII. *Le Rectangle des Segmens d'un Diamètre quelconque, faits par une Ordonnée à ce Diamètre, eſt au quarré de cette Ordonnée, comme le quarré de ce même Diamètre eſt au quarré de ſon conjugué.* 175
Une corde quelconque Ordonnée à un Diamètre, ou Parallèle à la Tangente au Sommet de ce Diamètre, eſt coupée en deux parties égales par ce Diamètre. 178
Une Ligne qui joint les Points de milieu de deux cordes parallèles dans une Ellipſe, eſt un Diamètre de cette Courbe. 179
Comment les propriétés, qui conviennent aux Axes conjugués, conviennent auſſi à deux Diamètres conjugués quelconques. 181
Ce que c'eſt que le Paramètre de deux Diamètres conjugués. 183
PROB. *Une Ellipſe étant donnée, en trouver un Diamètre quelconque, le Centre, les Axes, les Foyers, les Diamètres conjugués égaux.* 183 & 184
PROBL. *Ayant un Diamètre quelconque d'une Ellipſe, trouver la poſition des Ordonnées à ce Diamètre, tirer une Tangente à l'une ou l'autre de ſes extrémités, & trouver ſon Diamètre conjugué.* 185

PROB. *D'un Point donné au dehors d'une Ellipſe, mener une Tangente à cette Courbe.* 186

PROB. *Trouver le rapport du Rectangle des Axes d'une Ellipſe, au Parallèlograme de deux de ſes Diamètres conjugués quelconques, circonſcrit à cette Ellipſe.* 187

Uſage de l'Ellipſe dans la Dioptrique, ou dans la conſtruction des verres brûlans par réfraction, & d'autres inſtrumens, tels que les Lunettes, qui ſervent à perfectionner la vue ou à en corriger les défauts.

Ce que c'eſt que la Dioptrique, & ſa loi fondamentale. 188 & 189

Que M. Deſcartes eſt l'inventeur de cette Loi. 190

Comment les rayons de lumière ſont déterminés, en traverſant un Ellipſoïde de verre, à concourir au Foyer le plus éloigné. 191

Comment doit être conſtruit un Ellipſoïde, pour avoir la vertu de réünir des rayons de lumière à l'un de ſes Foyers, & pour en faire un excellent verre brûlant. 192

Ce qu'il faut faire pour conſtruire une Ellipſe, dont le grand Axe & la diſtance de ſes Foyers ſoient dans le rapport de la réfraction. Précaution importante pour rendre plus parfait un verre brûlant Ellipſoïde. 195

Comment ce verre eſt propre à changer le Foyer des yeux naturels & très-utile à ceux qui ont la vue courte. 194 & 195

Éloge de la Dioptrique de M. Deſcartes. 195

Diſſertation ſur la découverte de la Loi de la Réfraction. 196

On a nié à M. Deſcartes qu'il en fut l'inventeur, & la gloire en a été attribuée à Willebrord Snellius. 197

Sur quels fondemens on a voulu dépouiller M. Deſcartes de cet honneur. 197 & 198

Examen & réfutation de ces fondemens. 198 & 199

Expoſition de la découverte de Snellius *comparée à celle de M.* Deſcartes. *L'une ſe déduit de l'autre très-facilement. Pourquoi on n'en peut rien conclure contre M. Deſcartes. Ce grand homme entièrement juſtifié.* 199, 200, 201, 202
Uſage de l'Ellipſe dans la conſtruction du Porte-voix. 203
Comment l'Ellipſe peut ſervir à rendre la lumière plus vive. Son utilité dans la conſtruction des échos à voix baſſe. Explication de ces échos. 204 & 205
Uſage de l'Ellipſe dans la conſtruction des cornets acouſtiques. Et pourquoi ces cornets paroiſſent préférables aux Paraboliques. 205 & 206
Uſage de l'Ellipſe dans la conſtruction & le calcul des voutes ſurbaiſſées. 206 & 207

De l'Hyperbole.

Génération de cette Courbe. 208
Dans l'hyperbole les quarrés des Ordonnées ſont entr'eux, comme les Rectangles des Abciſſes par l'Axe intercepté correſpondant à ces Abciſſes. 209
Le même Plan, qui engendre une Hyperbole dans un cône, en engendre une autre égale & ſemblable dans le cône oppoſé. Définition des Hyperboles oppoſées. 209 & 210
Comment on déduit le ſecond Axe de l'Hyperbole, en vertu de ſa principale propriété; & comment ce ſecond Axe ſe trouve dans la Section d'un cône. 211 & 212
Pourquoi les Axes de l'Hyperbole ſont appellés conjugués. 213
Dans l'Hyperbole, le Rectangle d'une Abciſſe quelconque par ſon Axe intercepté, eſt au quarré de l'Ordonnée correſpondante, comme le quarré du premier Axe eſt au quarré du ſecond. 214
Remarque ſur la Section du cône parallèlement à ſon Axe. 214
Équation caractériſtique de l'Hyperbole. Ce que c'eſt qu'une Hyperbole équilatère. Comment on la trouve dans le cône. Et dans quels cas la Section de ce ſolide fait les Axes égaux ou inégaux. 215 & 216
Pourquoi le ſecond Axe de l'Hyperbole n'eſt pas à proprement parler un Axe. 217

Comment on détermine le ſecond Axe d'une Hyperbole. 219 & 220

La différence de deux Lignes, menées d'un même Point de l'Hyperbole à ſon Foyer & à celui de ſon oppoſée, eſt toujours égale au premier Axe de cette Courbe. 222

Définition du Paramètre de l'Hyperbole. Il eſt toujours égal à la double Ordonnée au Foyer. Et la diſtance du Foyer d'une Hyperbole à ſon Sommet, eſt plus petite que le quart de ce Paramètre. 223

Le quarré d'une Ordonnée quelconque au premier Axe d'une Hyperbole, eſt plus grand que le Rectangle de l'Abciſſe correſpondante par le Paramètre de ce premier Axe. 224

Pourquoi l'Hyperbole a été ainſi appellée. 225

Comment on trouve le Paramètre du ſecond Axe. 225

Le quarré d'une Ordonnée quelconque au ſecond Axe, eſt plus grand que le Rectangle de l'Abciſſe correſpondante par le Paramètre de ce ſecond Axe; pourvu que l'Abciſſe ſoit plus grande ou plus petite que la moitié du ſecond Axe. 225

En tirant une Ligne dans l'Angle des Aſymptotes parallèlement au ſecond Axe, de maniere qu'elle coupe l'Hyperbole, le Rectangle des deux parties de cette Ligne, faites par la rencontre de la Courbe, eſt égal au quarré du ſecond Axe. 226

La converſe de cette Propoſition eſt vraie. 227

Tous les Rectangles, formés des deux parties d'une Ligne quelconque, tirée dans l'Angle des Aſymptotes parallèlement au ſecond Axe, & coupée par la Courbe, ſont égaux entr'eux. 228

L'Hyperbole s'approche continuellement de ſes Aſymptotes, ſans pouvoir jamais les rencontrer, quand on les prolongeroit à l'infini. Et c'eſt proprement ce que ſignifie le mot Aſymptote. 229

Comment on peut trouver les Aſymptotes de l'Hyperbole dans le cône même. 230

Une Ligne tirée par le centre de l'Hyperbole, dans l'Angle de ſes Aſymptotes, coupe néceſſairement cette Courbe, ou ſon oppoſée en quelque Point, & entre au-dedans de cette Courbe, ſans la couper une ſeconde fois. 231

Ce que c'eſt qu'un premier Diamètre de l'Hyperbole, & com-

ment il eſt coupé en deux parties égales par le centre de cette Courbe. 231
Si par un Point quelconque de l'une des Aſymptotes de l'Hyperbole, l'on tire dans l'Angle des Aſymptotes, une Parallèle à l'autre, cette Parallèle coupera néceſſairement la Courbe en un ſeul Point. 231 & 232
Par un Point quelconque d'une Hyperbole menant deux Lignes parallèlement aux Aſymptotes, & terminées par ces Lignes, le Rectangle de ces deux Lignes ſera toujours égal à la puiſſance de l'Hyperbole. 232
La converſe de cette propoſition eſt vraie. 232 & 233
La puiſſance de l'Hyperbole eſt égale à la quatrième partie de la ſomme des quarrés des deux demi-Axes. 233
Le premier demi-Axe eſt égal à la Racine quarrée du double de la puiſſance de l'Hyperbole. 233
Si l'on tire, par un Point quelconque d'une Aſymptote une Ligne coupant les branches de l'Hyperbole, ainſi que les Aſymptotes; les parties de cette Ligne, compriſes entre une Aſymptote & une branche de la Courbe la plus proche, ſont égales. 233 & 234
La converſe de cette propoſition eſt vraie. 234
Comment on trouve la Tangente de l'Hyperbole. 235
Une Ligne terminée par les Aſymptotes, & coupée en deux parties égales au Point, où elle rencontre l'Hyperbole, eſt néceſſairement une Tangente. 235
La converſe de cette propoſition eſt vraie. 235
La Ligne menée au Sommet de l'Hyperbole, parallèlement au ſecond Axe, eſt Tangente à la Courbe. 235
Ce que c'eſt qu'un ſecond Diamètre conjugué, & comment il eſt coupé en deux parties égales. 236
Les Aſymptotes d'une Hyperbole étant données avec un Point de cette Courbe, en trouver deux Diamètres conjugués. 237
Avec deux Diamètres conjugués déterminer les Aſymptotes de l'Hyperbole. 237
Si une corde de l'Hyperbole eſt coupée en deux parties égales par un Diamètre, cette corde ſera néceſſairement parallèle à la Tangente, tirée par le Point où le Diamètre coupe la

Courbe. 238
Si deux cordes parallèles d'une Hyperbole, ſont coupées en deux parties égales par une Ligne, cette Ligne prolongée paſſera néceſſairement par le centre de la Courbe. 238
Ce que c'eſt qu'une Ordonnée à un Diamètre. 239
Tout premier Diamètre, différent de l'Axe, fait des Angles obliques avec ſes Ordonnées. Ainſi l'Axe eſt le ſeul premier Diamètre, qui faſſe des Angles droits avec ſes Ordonnées. 239
Le quarré d'une Ordonnée quelconque à un premier Diamètre, eſt au Rectangle du Diamètre intercepté par l'Abciſſe correſpondante, comme le quarré du Diamètre parallèle à cette Ordonnée, eſt au quarré du conjugué. 239
Les quarrés des Ordonnées à un premier Diamètre, ſont entr'eux comme les Rectangles des Diamètres interceptés par les Abciſſes correſpondantes. 240
Les propriétés & les équations de l'Hyperbole, par rapport à ſes Axes & aux Paramètres de ces Axes, ne différent des équations de la même Courbe, par rapport à deux de ſes Diamètres conjugués quelconques, & aux Paramètres de ces Diamètres, qu'en ce que les Axes ſont entr'eux des Angles droits, au lieu que les Diamètres conjugués ſont entr'eux des Angles obliques. 241 & 242
Qu'elle eſt l'équation de l'Hyperbole équilatère. 243
Deux Tangentes à l'Hyperbole ſont diviſées par les Points de contingence, & par le Point où elles ſe coupent, de maniére que les parties de l'une ſont proportionelles aux parties de l'autre. 244
Toute Tangente à l'Hyperbole rencontre un premier Diamètre quelconque de cette Courbe, en un Point au-deſſous du centre, tel qu'il en réſulte une Loi pour trouver la Tangente de l'Hyperbole. 244
Trouver cette loi par une nouvelle Méthode générale pour toutes les Courbes. 246
Combien cette dernière méthode eſt expéditive. Le petit nombre d'élémens qu'elle éxige. 247 & 248
En quel ſens on peut dire que les Aſymptotes de l'Hyperbole, en

deviennent enfin des Tangentes. 249
Trois Propoſitions très-utiles pour l'intelligence des Inſtitutions Newtoniennes *de M. Sigorgne.* 250, 251 & 253
Si d'un même Point de l'Hyperbole, on tire deux Lignes aux Foyers, & une Tangente à cette Courbe, l'Angle formé par ces deux Lignes ſera coupé en deux également par la Tangente. 253 & 254
La converſe de cette propoſition eſt vraie. 254
Combien elle eſt utile pour trouver les Foyers de cette Courbe & de ſon oppoſée. 255
Propoſition très-utile dans la Dioptrique, ou dans la conſtruction des Lunettes. Sa converſe ne l'eſt pas moins. 256 & 257
Si l'on tire, à deux Points quelconques d'une Hyperbole, deux Tangentes, & que de ſon Foyer on abbaiſſe des Perpendiculaires ſur ces Tangentes, elles croîtront moins, l'une par rapport à l'autre, que dans la raiſon des Racines quarrées des rayons vecteurs. 257
Propoſition, dont M. Sigorgne fait uſage dans ſes Inſtitutions Newtoniennes. 258
PROBL. *Conſtruire une Hyperbole & ſon oppoſée, de manière que la diſtance de ſes* Foyers *ſoit à ſon Axe tranſverſe en raiſon donnée.* 259
Conſtruire des Hyperboles avec deux Lignes données, pour les deux Axes de ces Courbes. 262
PROBL. *Une Hyperbole étant donnée, trouver ſon centre, ſes Axes, ſes Paramètres, ſon Foyer, ſes Aſymptotes.* 262
PROBL. *Trouver le rapport du Rectangle des Axes, au parallélogramme de deux Diamètres conjugués quelconques, circonſcrit aux Hyperboles oppoſées.* 263
PROBL. *Trouver la ſurface de l'Hyperbole.* 264
Lemme pour la Cubature de l'Hyperboloïde. *Une couronne circulaire eſt égale au Cercle, décrit avec un rayon moyen proportionel Géométrique entre la ſomme des rayons des Cercles concentriques, & la différence de ces rayons.* 265
PROBL. *Trouver la ſolidité de l'Hyperboloïde.* 265 & 266

Des Hyperboles conjuguées.

Ce que l'on entend par ces Hyperboles. Comment elles ont les mêmes Asymptotes & les mêmes Axes, que celles dont elles sont conjuguées. 267, 268 & 269

Les Hyperboles conjuguées passent par les extrêmités de tous les seconds Diamètres des Hyperboles dont elles sont conjuguées. Ce qui a fait dire à quelques Géomètres, que quatre Hyperboles conjuguées n'étoient que quatre quartiers de la même Courbe. Combien cela est peu fondé. 269 & 270

Usage de l'Hyperbole dans la Dioptrique, soit pour la construction des verres ardens, soit pour celle des Lunettes.

Connoissances préliminaires. 270

Une Hyperbole étant construite suivant le rapport de la réfraction, il en peut naître un Hyperboloïde, qui ait la propriété de reünir en un seul Point, tous les rayons parallèles à son Axe. Comment on peut construire une pareille Hyperbole. 271

Comment ont peut engendrer un Hyperboloïde, qui ait la propriété, s'il est de verre, de faire que tous les rayons parallèles deviennent divergens, après l'avoir traversé, comme s'ils partoient tous du Foyer de l'Hyperbole opposée à la génératrice. 273

Comment des verres Hyperboliques peuvent être utiles aux Vieillards, ainsi qu'à ceux qui ont la vue courte. 274 & 275

Observation importante sur la réduction de cette Théorie en pratique.

Pourquoi l'usage de tailler sphériquement les verres de Lunettes a prévalu? combien il seroit utile que les Sçavans devinssent artistes. Exemple de cette vérité dans les personnes de Mrs. Huyghens, Mydorge, Descartes. Combien le défaut d'ouvriers intelligens nuit au progrès des Arts. Que l'on construit aujourd'hui en Angleterre des Miroirs Téleſco-

piquer, suivant la doctrine de M. Descartes. *Succès de cette pratique. L'intérêt qu'ont les ouvriers françois à s'y appliquer.* 275, 276, 278
Usage de l'Hyperboloïde dans la Catoptrique. 278
Usage de l'Hyperbole pour la Trisection de l'Angle. 279
Usage de l'Hyperbole pour la duplication du Cube. 281

Dissertation sur les Miroirs d'Archimède & de Proclus.

Ce qu'il faut sçavoir pour apprétier ce que quelques Historiens racontent là-dessus. 283
*Tzetzés parle des Miroirs d'*Archimède. *Plutarque n'en dit rien. En supposant qu'ils aient éxisté, la portée de ces Miroirs paroît fort éxagérée. Confirmation de ce jugement par le P.* Kircher. 284
Il n'est pas probable que ces Miroirs ayent été paraboliques; ni que l'on puisse, par le moyen de la Parabole, transformer un Foyer en Ligne brûlante indéfinie. Insuffisance des Miroirs Elliptiques & Hyperboliques. 285
Examen des Miroirs sphériques concaves. Ils n'ont point proprement de Foyer, & ne laissent pas que d'être caustiques. D'où leur vient cette propriété. La Théorie est d'accord avec l'expérience. Il n'est pourtant pas vraisemblable que les Miroirs d'Archimède ayent eu cette forme, non plus que ceux de Proclus dont parle Zonaras. 286, 287, 288, 289
Les Miroirs d'Archimède & de Proclus étoient-ils des Miroirs plans? Expériences du P. Kircher à ce sujet. La vertu caustique de ces Miroirs est prédite. La prédiction s'accomplit en M. de Buffon. Il fonde une nouvelle doctrine. 289, 290, 291, 292, 293

De la Cissoïde.

Génération de cette Courbe. Dioclés en est l'inventeur. Elle a plus de 1400 ans d'ancienneté. Elle a une Asymptote. 293, 294

Par le moyen de cette Courbe, on trouve quatre Lignes en proportion Géométrique continue. D'où réſulte ſon uſage pour la duplication du Cube. 294 & 295

De la Conchoïde.

Sa génération, ſon inventeur, ſon ancienneté. Elle a une Aſymptote. 296

Quelqu'inclinée que ſoit ſur l'Aſymptote d'une Conchoïde une Ligne droite, cette droite ſera néceſſairement coupée, ou déterminée à être coupée par la Conchoïde. 297

Lemme néceſſaire pour comprendre l'uſage de cette Courbe en Géométrie. 297

Uſage de la Conchoïde pour la duplication du Cube. Elle ſert à trouver géométriquement deux moyennes proportionelles entre deux Lignes données. 297 & 298

De la Quadratrice.

Génération de cette Courbe. Pourquoi ainſi appellée. Dinoſtrate en eſt l'inventeur. 299

Si par un Point quelconque de la Quadratrice, on tire un rayon de l'Arc générateur, & du même Point une Perpendiculaire ſur l'Axe de la Courbe, l'Arc générateur ſera à ſa partie coupée par le rayon, comme l'Axe de la Courbe eſt à ſa partie coupée par la Perpendiculaire. 299

LEMME. I. *Si du Sommet d'un Angle l'on décrit pluſieurs Arcs concentriques entre ſes côtés, & que l'on coupe ces Arcs par des rayons, les Arcs entiers ſeront entr'eux, comme leurs parties coupées par les rayons.* 300

LEMME. II. *La Tangente d'un Arc eſt plus grande que cet Arc.* 300

Uſage de la Quadratrice pour la rectification géométrique très-approchée de la circonférence du Cercle. L'Arc générateur eſt une troiſième proportionelle à la Baſe de la Quadratrice & au rayon de cet Arc. 300

Dans quel cas la circonférence du Cercle ſeroit rectifiée par le

Moyen de la Quadratrice. Pourquoi elle ne l'eſt pas. Comment la rectification en eſt très-approchée, & par conſéquent ſa Quadrature auſſi. Pourquoi la deſcription de cette Courbe eſt inutile à la Quadrature du Cercle très-approchée, quoique cette Quadrature ſoit fondée ſur ſes propriétés. 301

Quand on auroit la Quadrature abſolue du Cercle par cette méthode, on n'auroit pas pour cela le rapport du Diamètre à la circonférence. C'eſt pourquoi le travail d'Archimède à cet égard paroît plus eſtimable. 302

Erreur de quelques Modernes, qui ont attribué à cette Courbe la propriété de diviſer un Angle quelconque en un nombre quelconque de parties égales. 303

En quoi conſiſte leur Paralogiſme. Dans quel cas la Quadratrice ſeroit omni-ſectrice. *Ce cas eſt une pétition de principe. Pappus l'a obſervé il y a environ* 1400 *ans.* 304

De la Spirale.

Sa génération. Ce que c'eſt qu'une première, une ſeconde, une troiſième Spirale, &c. Ces dénominations peu exactes. On y en ſubſtitue d'autres. 305

Comment la Spirale peut être conçue engendrée par un Point qui coule. Dans quel cas la Spirale ſeroit propre à diviſer une circonférence de Cercle en raiſon donnée. Ce cas ſuppoſe la diviſion géométrique d'une circonférence de Cercle en un nombre quelconque de parties égales. Cette Courbe, qui eſt d'Archimède, ne ſçauroit donc être utile dans les opérations, où l'on recherche une préciſion abſolue. 306

De la Cycloïde.

Sa génération, ſes différens noms. Que ſa Baſe eſt exactement égale à la circonférence de ſon Cercle générateur. Ce que c'eſt que ſon Point culminant. Comment toutes ſes doubles Ordonnées ſont coupées en deux parties égales par ſon Axe. Pourquoi une Perpendiculaire, élevée ſur ſon Axe à ſon Point culminant, eſt Tangente à cette Courbe. 307

PROP. I. *La partie d'une Ordonnée quelconque à la* Cycloïde,

compriſe entre cette Courbe & la rencontre du Cercle générateur, eſt toujours égale à l'Arc de ce Cercle, compris entre le Point de rencontre & le Point culminant. 308

Réciproquement, ſi une Courbe eſt telle, qu'ayant décrit un Cercle ſur ſon Axe, toutes les droites tirées de l'un de ſes Points quelconques ſoient toujours égales à l'Arc correſpondant du Cercle, cette Courbe ſera néceſſairement une demi-Cycloïde, dont le Cercle décrit ſur ſon Axe ſera le Cercle générateur. 308

PROP. II. *Ayant mené une Ordonnée quelconque à la Cycloïde, juſqu'à la rencontre du Cercle générateur, ſi après avoir tiré à ce Point une Tangente au Cercle, l'on mène, par le Point où l'Ordonnée rencontre la Cycloïde, une parallèle à cette Tangente, cette parallèle entrera néceſſairement au-dedans de l'eſpace Cycloïdal.* 309

PROP. III. *En ſuppoſant toujours l'Ordonnée précédente, ſi l'on conçoit, aux Points où elle rencontre la Cycloïde & ſon Cercle générateur, une Tangente à la Cycloïde & une Tangente au Cercle, ces deux dernières Lignes ſeront néceſſairement déterminées à ſe rencontrer.* 310

PROP. IV. *Dans la ſuppoſition de la même Ordonnée, les deux Tangentes précédentes ſe rencontreront en un Point tel que cette Ordonnée ſera égale à la Tangente correſpondante du Cercle générateur.* 310

Réciproquement, après avoir tiré d'un Point quelconque de la Cycloïde, une Ordonnée ou une Parallèle à ſa Baſe, comme ci-deſſus, & du Point où cette parallèle rencontre le Cercle générateur, mené une Tangente à ce Cercle, ſi l'on fait cette Tangente égale à l'Ordonnée, ces deux Lignes formeront un Angle, dont la Baſe ſera une Tangente à la Cycloïde. 310

PROP. V. *Suppoſant la Tangente, dont on vient de parler, la corde tirée du Point de rencontre du Cercle au Point culminant eſt parallèle à la Tangente correſpondante de la Cycloïde.* 311

Réciproquement, d'un Point quelconque de la Cycloïde, tirant une Ordonnée juſqu'à la rencontre du Cercle générateur, ſi

de ce dernier Point l'on mène une corde au Point culminant, & que du Point où l'Ordonnée coupe la Cycloïde, l'on tire une parallèle à cette corde, cette parallèle sera Tangente à la Cycloïde. 311 & 312

Ainsi la Perpendiculaire sur la Base de la Cycloïde, à l'un ou l'autre Point d'origine de cette Courbe, est Tangente à la Cycloïde. 312

Prob. Trouver la Quadrature ou déterminer la surface de la Cycloïde. 312

Combien est simple la nouvelle application que l'on fait de la méthode des Limites, pour la Quadrature des Courbes. 313

Cor. Si l'on avoit la Quadrature absolue du Cercle, on auroit celle de la Cycloïde, & réciproquement. 513

Prob. Décrire une Cycloïde. La Description en peut être ou toute mécanique, ou en partie mécanique & en partie géométrique. Attention que l'on doit avoir dans la Description mécanique de cette Courbe. Moyen simple de rectifier mécaniquement la circonférence du Cercle d'une manière très-parfaite. 314

Décrire la Cycloïde en partie mécaniquement & en partie géométriquement. Surquoi est fondée cette résolution mi-partie. 315

De la Dévelopante de la Cycloïde.

Ce que c'est qu'une Dévelopante, une Dévelopée, un rayon de la Dévelopée. 316

Tout rayon de la Dévelopée est toujours égal à la partie de cette Courbe, de dessus laquelle il s'est détaché. Ce rayon est toujours une Tangente à la Dévelopée. 316

Cor. En élevant à l'extrémité d'un rayon quelconque de la Dévelopée, une Perpendiculaire sur ce rayon, elle sera Tangente à la Dévelopante. Et ainsi tous les rayons d'une Dévelopée sont Perpendiculaires à sa Dévelopante. 316 & 317

Pourquoi il ne suffit pas, pour démontrer qu'une Ligne est Tangente à une Courbe, que cette Ligne ne rencontre la Courbe qu'en un seul Point. 317 & 318

La Dévelopante d'une Courbe est une Courbe, & si la Déve-

lopée eſt toujours concave du même ſens, la Développante ſera auſſi toujours concave du même ſens que ſa développée. 318 & 319

LEMME. *Deux Courbes toujours concaves du même côté, & qui ont la même origine, ne peuvent être telles que toutes les perpendiculaires à l'une ſoient en même tems Perpendiculaire à l'autre.* 319

Une demi-Cycloïde étant donnée, déterminer la nature de ſa Développante. 320

La Développante d'une Cycloïde eſt auſſi une Cycloïde égale en tout à ſa Développée. 321

L'Arc Cycloïdal eſt toujours double de la corde correſpondante du Cercle générateur. 322

Obſervation importante ſur cette Rectification. 322

Un fil, qui ſe développe de deſſus une Cycloïde égale à ſa longueur, décrit par ſon extrêmité mobile une Cycloïde égale & ſemblable à ſa Développée. 323

Expoſition des Élémens, ſur leſquels eſt fondée la démonſtration de l'*Iſochroniſme* dans la Cycloïde.

Si un corps commence à tomber de différentes hauteurs le long d'une Courbe, les viteſſes acquiſes à des Points quelconques au-deſſous des Points de partance, ſeront entr'elles comme les racines quarrées des longueurs verticales, qui déſignent les hauteurs d'où le corps eſt tombé. 323

Une Courbe peut être partagée en parties ſi petites, que les viteſſes d'un mobile acquiſes depuis un Point de partance, n'augmenteront point ſenſiblement, c'eſt-à-dire, rélativement à la viteſſe acquiſe, en parcourant ces portioncules. 323 & 324

Dans le mouvement uniforme, quand les viteſſes ſont entr'elles comme les eſpaces parcourus, les tems employés à parcourir ces eſpaces ſont néceſſairement égaux. 324

PROP. VI. *Un corps qui ſe meut en vertu de ſa peſanteur dans une Cycloïde renverſée, dont la Baſe eſt parallèle à l'horiſon, décrit une demi-Cycloïde entière, dans le même tems qu'il en-*

parcourt un Arc quelconque, & c'eſt ce qu'il faut entendre, quand on dit que les vibrations ou oſcillations d'un Pendule dans une Cycloïde ſont iſochrones ou d'égale durée. 325

Uſage de la Cycloïde dans la conſtruction des Horloges à pendule. L'utilité du pendule dans cette Machine. Il en modere le mouvement, & il faut qu'il le rende uniforme. Le pendule, mû circulairement, ne produit point ce dernier effet. 326 & 327

Un pendule, qui décrit des Arcs Cycloïdaux, a toutes ces vibrations iſochrones ou d'égale durée, ſoit qu'elles ſoient grandes, ſoit qu'elles ſoient petites. 328

Comment un pendule peut ſe mouvoir dans une Cycloïde. Quel eſt l'uſage de la Fourchette. Quel doit être la longueur du pendule, & comment doivent être diſpoſées les Lames Cycloïdales, pour déterminer le pendule à décrire une Cycloïde. Pourquoi le pendule doit être compoſé de deux parties, l'une fléxible & l'autre infléxible. 328

Pourquoi la Cycloïde n'eſt plus d'uſage dans les Horloges à pendule. Comment elle a ſervi néanmoins à les perfectionner.

Hiſtoire de la Cycloïde.

Le P. Merſenne l'a obſervée le premier, Roberval en a découvert la quadrature, Deſcartes la Tangente, Wren la rectification, & Huyghens l'yſochroniſme dans cette Courbe. 330

Fin de la Table.

AVERTISSEMENT.

1°. *Quand, en lisant cet Ouvrage, on rencontrera un chiffre entre deux parenthèses de cette manière* (12), *cela signifiera que, pour les fondemens de ce qu'on lit actuellement, il n'y a qu'à recourir au* n°. 12 *de la matière que l'on étudie. Si l'on en est à la Parabole, on ira consulter le* n°. 12. *de la Parabole, & ainsi des autres. Mais, si étudiant l'Ellipse ou quelqu'autre Courbe, on tombe sur un renvoi de cette espèce* (n°. 15. Parab.), *cela voudra dire, qu'il faut se rappeller ou revoir le nombre* 15 *de la Parabole, &c.*

2°. *Si on trouve immédiatement après une équation une Lettre capitale, telle que* D *ou* (D), *on doit entendre que cette Lettre* D, *ou toute autre semblable, désigne cette équation, à laquelle il faudra recourir, quand on verra un pareil signe.*

3°. *Les Elémens de Géométrie sur lesquels on s'appuye dans cet Ouvrage, sont mes Institutions de Géométrie, imprimées en* 1746, *& qui se vendent chez de Bure l'aîné. Elles sont citées de cette manière* (306. *Inst. T.* 1. *ou* 2.); *c'est-à-dire, par le* n°. 306. *des Institutions, Tome premier ou second, suivant les cas.*

PRÉFACE

PRÉFACE

Dont la lecture eſt abſolument néceſſaire, pour ſçavoir comment on doit lire cet Ouvrage, & dans quel eſprit il a été compoſé. On y trouvera une Analyſe de ce Livre, propre à en former un tableau complet dans l'eſprit des Lecteurs.

IL y a deux moyens d'étendre les limites des Sciences & des Arts; c'eſt d'y faire des découvertes, & de mettre le Public en poſſeſſion de ces découvertes. Ces deux moyens qui ſembleroient d'abord devoir être produits en même-tems, & marcher d'un pas égal, laiſſent ſouvent entr'eux de très-grands intervalles.

Les véritables inventeurs, dont le nombre eſt fort petit aux yeux qui apperçoivent l'enchaînement des productions, franchiſſent à la fois des eſpaces immenſes, & arrivent à des vérités inacceſſibles au commun des hommes, & en quel-

que ſont effrayantes, ſi l'on ne jette, pour ainſi dire, un pont qui les lie & couvre l'abîme qui les ſépare.

Souvent même il ne faut s'en prendre qu'à l'ingratitude des autres hommes, quand les eſprits ſupérieurs ne laiſſent pas échaper ſur leurs productions un degré ſuffiſant de lumière. Ce qui coûte peu à comprendre, paroît, à bien des gens avoir peu coûté à produire. Ils meſurent la conſidération ou l'eſtime ; qu'ils doivent avoir pour les Inventeurs, ſur le plus ou le moins de difficulté qu'ils ont eu à ſaiſir leurs idées. Voilà pourquoi de très-grands hommes ont quelquefois laiſſé exprès des obſcurités dans leurs Ouvrages, & mis des entraves à l'avancement des Sciences.

M. *Deſcartes* en eſt un éxemple que je ne cite qu'à regret. Peut-être n'y a-t-il jamais eu d'homme, plus porté que lui à travailler directement pour l'avantage du genre humain : mais perſécuté par ſes envieux, qui affectoient de publier que ſes nouvelles vûes en Mathématiques, en Philoſophie, & ſur-tout en Phyſique, n'avoient rien de fort extraordinaire, & que l'on devoit les rencontrer aſſez facilement, pour peu que l'on fît profeſſion de penſer, ſans changer de ſentiment, il changea de conduite. Ayant compris que le peu de cas qu'ils ſembloient faire de ſes productions, venoit uniquement de la grande clarté qu'il avoit répandue juſqu'alors dans ſes Ouvrages, il ſe propoſa d'en être un peu moins libéral dans

la ſuite. Sa Géométrie lui en préſenta bien-tôt l'occaſion. Il y laiſſa tant de choſes à déſirer, & en fit entrevoir en même-tems tant d'autres, qu'ils convinrent alors que jamais il n'avoit paru d'auſſi grand Géomètre. Cependant vaincus par la difficulté de l'entendre, ils lui reprochèrent ſon laconiſme exceſſif; ſans réfléchir que le motif de leur accuſation, étoit le principal & peut-être l'unique fondement de leur eſtime.

Ce petit reſſentiment en apparence, qui échapa à la grande ame de M. *Deſcartes*, eut des ſuites fâcheuſes pour l'avancement des Sciences. De très-bons eſprits, en état de ſervir le genre humain par leurs propres recherches, uſèrent toutes leurs penſées à pénétrer celles de cet excellent Géomètre. Sa Géométrie, que l'on peut entendre aujourd'hui, dans le cours d'une année, avec le ſecours des Élémens & de l'Algèbre, a été pendant près de [redacted]s l'objet des Commentaires des plus fo[redacted]thématiciens ſes ſucceſſeurs. Dans les premiers tems qu'elle parut, il n'y eut même que deux hommes en Europe, Meſſieurs de *Beaune* & *Schooten*, en état de la comprendre [*a*].

Ce ne ſont pas là les ſeules cauſes qui rallentiſſent l'avancement des Sciences. Depuis environ 150 ans on s'eſt élevé à des ſpéculations très-ſublimes, mais on a un peu trop négligé

[*a*] Voyez *Baillet*, Vie de *Deſcartes*.

de faire voir, comment elles contribuoient à la perfection des Arts. Si les hommes ſe bornoient à la ſimple curioſité & au ſeul raiſonnement, la Théorie ſuffiroit; ils ont encore d'autres beſoins, & le gros du monde n'eſt guères touché que des objets matériels ou tout-à-fait palpables; il faut donc les attacher par ce qui eſt le plus généralement aſſorti à leur caractère. Après trois ou quatre ans d'une profonde étude de la haute Géométrie, je ne vois rien de ſi humiliant que d'avoir encore à ſe demander, de quelle utilité cela peut-il être dans le commerce de la vie? Comment en convaincre les autres hommes? Et, ſi je ne leur ſuis pas utile, puis-je eſpérer qu'ils me ſçauront gré de mon travail?

Cependant, dans les Livres qui ſervent à l'éducation, on ne trouve preſque rien d'appliqué directement aux Arts. M[illegible]eurs de la *Hire*, *Guiſnée* & de l'*Hôpital*, [illegible]availlé ſur les *Sections coniques*; leurs Ouvra[illegible]ont ſans doute excellens; mais ils ne contiennent que de la Théorie pure. Les jeunes gens commencent la haute Géométrie par ces Auteurs. Ainſi rebutés par la difficulté, la ſéchereſſe & la ſtérilité apparente de cette étude, ils y renoncent; & ne ſoupçonnant pas la négligence ou le peu d'adreſſe des Auteurs, ils ſe croyent incapables tandis qu'ils ne ſont que mal conduits.

Parmi tous ces obſtacles, qui ne permettent aux Sciences que de marcher à pas très-lents, je compte, comme un des plus forts, celui de ne

pas montrer assez les occasions, les dégrés ou la chaîne, par où l'on est arrivé à une découverte. De la manière dont on la produit communément, il sembleroit qu'elle est descendue du Ciel tout à coup; mais qui ose dans ces matières prétendre au droit d'être inspiré? Faire observer les nuances ou les degrés qui conduisent à une production, c'est dévoiler le génie même qui y a présidé. Par-là on s'accoutume à remarquer la liaison des plus petites choses avec les plus grandes; & guidé par la raison plutôt que par la mémoire, on est quelquefois assez heureux pour appercevoir la fin d'une recherche, parce qu'on en a bien vû le commencement.

Si l'on fait attention au point où les hautes Sciences se sont élevées depuis deux siécles, on ne sçauroit douter que cela ne vienne, de ce que quelques Sçavans se sont attachés à en applanir les routes. Plus de personnes y ont pénétré, les vûes se sont multipliées, & il est arrivé, ce que l'on devoit naturellement attendre, que les découvertes, en se répandant, en ont fait naître de nouvelles. C'est donc élever plus haut les Sciences que de travailler à leur propagation.

Après m'être appliqué très-sérieusement à reconnoître les différentes causes, qui peuvent retarder leur progrès, j'ai cherché à en diminuer le nombre; & dans ce dessein, mon sujet s'est présenté à moi sous trois points de vûe, qui me paroissent se donner mutuellement du secours, la Théorie des Courbes, leurs usages dans les Arts,

l'Hiſtoire de leur origine & de leur progrès. La Théorie en ſera la lumière, l'uſage le fruit, & l'Hiſtoire le délaſſement.

Cette économie générale m'a paru néceſſaire. On ne voit que trop de monde ſe diſpenſer d'étudier les *Courbes*, ſous le prétexte que les uſages en ſont très-bornés, ou plutôt parce que l'application n'en eſt point manifeſte. Cette objection tombe ici, les uſages abondent; & ceux, dans l'éducation deſquels cette étude doit entrer, ne pourront plus s'y refuſer ſous ce prétexte. S'ils oppoſent encore la ſéchereſſe d'un pareil travail, j'ai tâché d'y obvier par l'Hiſtoire des Sciences & des Arts, & par de courtes Diſſertations ſur leurs premiers Inventeurs. Dans les études ſérieuſes où l'eſprit eſt tendu, un trait d'Hiſtoire eſt comme un lieu de repos où l'on ſe rafraîchit ſur la route, & où l'on reprend des forces pour le reſte du voyage.

On vient de voir mon plan, en voici l'éxécution.

Quand j'en ſuis à la Théorie d'une Courbe, je n'en démontre que les propriétés, néceſſaires pour l'intelligence de ſon application aux Arts. Tout ce qui ne m'a paru que curieux & en même-tems trop difficile, ou avoit un rapport très-éloigné à mon plan, a été entièrement ſupprimé. Il y a tant de choſes, utiles pour éxercer l'eſprit, pourquoi s'occuper du ſuperflu?

Cette économie du tems & des forces de l'eſprit, n'y eſt pas médiocrement aidée par l'atten-

tion que j'ai eue, de déduire toutes les propoſitions immédiatement les unes des autres, ſans y laiſſer rien à deviner. Il m'a toujours paru que, dans l'explication des matières difficiles, c'étoit aſſez bien deviner que de les entendre.

Je ne ſuppoſe que la connoiſſance de mes *Inſtitutions*. S'il ſe préſente quelque vérité incidente, qu'on ne trouve point dans les Élémens ordinaires de Géométrie, je la démontre éxactement en Note au bas des pages. Et, comme j'ai eu beſoin du *Calcul des Puiſſances par leurs Expoſans* ainſi que de celui des *Radicaux*, j'en ai mis une explication ſuffiſante à la tête de ce Traité, ces Calculs ne m'ayant point paru traités ailleurs d'une manière aſſez ſimple. L'un s'eſt trouvé déduit de l'autre avec une extrême facilité, par la ſeule transformation des *ſignes Radicaux* en ſimples *Expoſans*. Cet Ouvrage n'a donc beſoin que de lui-même pour être entendu.

Il le ſera d'autant plus commodément, par ceux qui ſuivent l'éducation publique, que j'ai indiqué par des étoiles ou par des avis particuliers, tout ce qu'ils peuvent paſſer ſans inconvénient. Ceux, par éxemple, qui ne ſe ſoucieront pas d'entendre l'Artillerie ou le Calcul des Mines, n'ont pas beſoin des Propoſitions ſur leſquelles l'intelligence de ces Arts eſt fondée. En les en avertiſſant, l'Ouvrage s'abrège & l'on ménage le tems.

Les *Inſtitutions Newtoniennes* de M. *Sigorgne* m'ayant paru propres à s'introduire de plus en

plus dans les Cours de Philoſophie, j'ai cru rendre quelque bon office à Meſſieurs de l'Univerſité, en démontrant avec une juſte étendue toutes les Propoſitions des *Coniques*, qui ſervent de Baſe à ces *Inſtitutions*. Mais on pourra les paſſer, ſi l'on a d'autres vûes; elles ne tiennent au corps de mon Ouvrage qu'en qualité de Corollaires, dont la ſuppreſſion ne détruit point l'édifice.

Indépendamment de cette diſpoſition des différentes parties de mon travail par rapport à la Théorie, on y verra une nouvelle Méthode générale de trouver les *Tangentes* des Courbes Algébriques, dont on a l'équation, ainſi qu'une nouvelle application de la *méthode des limites* à la *Quadrature* des Courbes. Cette dernière eſt, pour le moins, auſſi ſimple & auſſi expéditive que celle du *Calcul intégral*, ſans en avoir l'obſcurité.

Si tous ces caractères diſtinguent déja mon Ouvrage de ceux qui l'ont précédé, la manière, dont la Théorie y eſt appliquée, lui donnera un nouveau degré de diſtinction.

J'y remonte toujours aux premiers Élémens de chaque Art qui eſt entré dans mon plan; les doutes y ſont diſcutés, les expériences ſoumiſes à l'examen, le moindre nuage diſſipé. Il y a encore tant de choſes à découvrir ou à perfectionner dans les hautes Sciences, que je ne ſçaurois approuver la conduite de ceux qui laiſſent, dans leurs explications, quelque choſe à faire au génie des Lecteurs. C'eſt impoſer inutilement la néceſſité

d'inventer, en quelque ſorte, ce qui eſt trouvé. La route des Sciences eſt longue, & la vie fort courte. Rendons facile la première, & faiſons joüir promptement dans la ſeconde; ce ſera abréger l'une, & étendre l'autre.

Compoſée dans cet eſprit, chaque application eſt devenue un Traité complet. Ainſi la Théorie & la Pratique du *Jet des Bombes*, y ſont démontrés avec tout le détail néceſſaire. On n'y a oublié la réſolution d'aucun Problême; &, pour aſſurer ſa Théorie ou répondre aux difficultés que l'on y oppoſe, on a produit un grand nombre d'expériences, faites uniquement dans le deſſein d'en comparer les réſultats avec ceux que l'on déduit de la Géométrie. L'accord en eſt auſſi parfait qu'il le puiſſe être; ce ſeroit donc oublier les intérêts de la Société, que de s'en tenir encore au ſimple tâtonnement.

On s'eſt conduit de la même manière à l'égard du Calcul de l'excavation des Mines, ſuppoſant toujours que l'on parle à des Lecteurs, qui n'entendent que ce qu'on leur fait entendre. On n'a pas été moins ſcrupuleux pour ce qui concerne la conſtruction la plus avantageuſe des Porte-voix, des Cornets acouſtiques, des Miroirs brûlans par *réflexion*, des jambages des cheminées pour échauffer les appartemens, & de quelques Échos ſinguliers qui tiennent du prodige.

Tous ces uſages ſont une ſuite des propriétés de la *Parabole*. On auroit fort ſouhaité, à meſure que l'on découvroit une vérité de Théorie, d'en

faire voir ſur le champ l'application à la Pratique. Mais, comme il y a beaucoup de Propoſitions, qui n'ont d'autre uſage que de ſervir à la démonſtration des vérités, immédiatement appliquables aux Arts, il a fallu ſuivre une autre méthode. La grande diſtance qu'il y auroit eue alors entre pluſieurs vérités de Théorie, dépendantes les unes des autres, en eut infailliblement rompu le fil dans l'eſprit des Lecteurs. C'eſt pourquoi on n'a donné les *uſages* ou *applications* d'une Courbe, qu'après en avoir expoſé toute la Théorie, dont on avoit beſoin.

C'eſt donc la même marche dans l'*Ellipſe* & l'*Hyperbole*. Après en avoir donné la Théorie, on applique ces Courbes à la Dioptrique ou à l'art de tailler les verres propres à corriger les défauts de la vûe ou à en augmenter la puiſſance. On y revient aux Porte-voix & aux Cornets acouſtiques. On y démontre que ces inſtrumens ſont beaucoup plus parfaits, en faiſant les premiers *Ellipſico-paraboliques*, & les ſeconds ſimplement *Elliptiques*. On explique, à cette occaſion, les Échos à voix baſſe. Les Miroirs brûlans par *réfraction* n'y ont pas été oubliés, non plus que la manière de calculer la ſolidité des voûtes *ſurbaiſſées*. Toute la doctrine de l'*Ellipſe* eſt terminée par une Diſſertation, où l'on fait voir que M. *Deſcartes* eſt le véritable Inventeur de la *Dioptrique*; & l'on recherche dans une autre, à la fin de l'*Hyperbole*, les eſpèces de Miroirs dont *Archiméde* & *Proclus* ont pu ſe ſervir, pour opérer les prodigieux

effets que quelques Hiſtoriens leur attribuent.

Les quatre Courbes ſuivantes, la *Cyſſoïde*, la *Conchoïde*, la *Quadratrice*, & la *Spirale d'Archiméde*, ayant peu ou point d'uſage dans les Arts utiles, on s'eſt borné à en expliquer les propriétés, néceſſaires à l'intelligence de ce qui en a occaſionné la naiſſance; & ce Traité devoit finir là, c'eſt-à-dire, qu'on devoit n'y faire mention que des Courbes anciennes. On s'étoit réſervé à parler des Courbes modernes, appliquables aux Arts, dans un autre Ouvrage, au cas que celui-ci fût bien reçu du Public, & que d'autres circonſtances ne s'y oppoſaſſent pas; mais pluſieurs perſonnes ont fait tant d'inſtances, par rapport à la *Cycloïde*, que l'on n'a pu ſe refuſer à en donner ici un petit Traité. On s'y eſt principalement attaché à conſidérer les propriétés, qui conduiſent à l'intelligence de l'application de cette Courbe à l'Art des Horloges à pendule. On y eſt entré dans tout le détail de la *Méchanique*, qui peut faire comprendre le jeu de ces admirables machines. Enfin l'on verra, par une courte Hiſtoire de la *Cycloïde*, combien ſont importantes de pures ſpéculations de Géométrie, qui paroiſſoient ne préſenter d'abord que des vérités indifférentes.

Tels ſont les objets que j'ai embraſſés dans l'exécution de mon Plan. Je puis bien répondre qu'il n'y a, en *France*, aucun Ouvrage de cette eſpèce, compoſé dans ce goût; c'eſt au Public à décider ſi, en cherchant à lui être utile d'une manière nouvelle, j'ai eu le bonheur, par la

variété des uſages & l'Hiſtoire des découvertes ; de ſauver la ſéchereſſe dont ces matières ne ſont que trop ſuſceptibles.

Cependant les Préfaces étant devenues un peu ſuſpectes ; parce qu'il eſt plus aiſé de promettre que de tenir, & qu'ordinairement il y a aſſez de différence entre le fait, & ce qu'il falloit faire, je crois ne pouvoir mieux raſſurer les Lecteurs, juſtement prévenus, que de leur produire cette Approbation de l'Académie Royale des Sciences.

EXTRAIT DES REGISTRES

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Du 7 Mai 1750.

NOus avons éxaminé, par ordre de l'Académie, un Traité des *Sections coniques* & des autres Courbes anciennes, ainſi que de la *Cycloïde*, compoſé par M. *de la Chapelle*, de la Société Royale de *Londres*.

L'Auteur, après avoir montré les propriétés de ces Courbes par le moyen de l'*Analyſe*, explique les uſages qu'on en a fait dans différens Arts. Ainſi, à l'article de la Parabole, il donne la Théorie [*a*] du *Jet des Bombes*, & le Calcul de l'*Excavation des Mines*. A l'article de l'*Ellipſe*,

[*a*] La Pratique y eſt auſſi amplement expliquée.

il explique l'uſage qu'on en a fait, ou qu'on en peut faire pour les Miroirs brûlans & pour les verres de Lunette. A l'article de l'*Hyperbole*, il montre auſſi l'application de cette Courbe aux recherches de Catoptrique & de Dioptrique. Enfin, à l'article de la *Cycloïde*, il fait voir comment la Théorie de cette Courbe a ſervi à perfectionner les Pendules, & comment elle y ſert encore, en quelque manière, par les petits Arcs de cercle qu'on leur fait décrire. L'Auteur traite auſſi des Échos & des Porte-voix; & il joint à toutes ces Recherches des Diſſertations ſur chaque Découverte, ſur l'origine des Sciences & des Arts, qui ſont entrés dans ſon Plan, ainſi que des obſervations ſur les expériences propres à confirmer la Théorie.

M. *de la Chapelle* donne les *Tangentes* des différentes Courbes, dont il parle, en regardant ces *Tangentes* comme des *Sécantes*, dont les Points d'interſection avec la Courbe ſe confondent, & il trouve la *Quadrature* des mêmes Courbes par la Méthode des limites, qu'il avoit expliquée dans ſes *Inſtitutions de Géométrie*, déja approuvées par l'Académie; de ſorte que, ſans employer le Calcul différentiel & intégral, il ne laiſſe pas de faire concevoir aux Commençans la vraye Métaphyſique de ces Calculs.

Nous croyons donc que ce nouvel Ouvrage de M. *de la Chapelle* ſera utile à ceux qui ſe deſtinent à l'étude de la haute Géométrie, & de ſon application à la Phyſique, tant parce que l'Auteur

y renferme plusieurs matières auparavant éparses dans différens Livres, que parce qu'il les a traitées avec beaucoup de soin & de clarté.

Signé, CASSINI, D'ALEMBERT.

Je certifie le présent Extrait, conforme à l'Original & au jugement de l'Académie. A Paris ce 15 Mai 1750.

GRAND JEAN DE FOUCHY,
Sécrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

Fautes eſſentielles à corriger avant que d'étudier cet Ouvrage.

Pag. 9 $\sqrt{y}$ *lif.* $\sqrt[3]{y}$

129 *lig.* 18, 19 & 20 $\overrightarrow{PM}$ *lif.* $\overrightarrow{BM}$

154 *lig.* 12 $b - y \times b$ *lif.* $\overline{b - y \times b}$

164 *lig.* 36 Propoſitions *lif.* Proportions

177 *lig.* 16 $xx - mn \times aa - xx$ *lif.* $\overline{xx - mm \times aa - xx}$

228 *lig.* 22 $\overrightarrow{BH}$ *lif.* $\overrightarrow{BH}$

258 *lig.* 8 $\frac{f\,T}{f\,M}$ *lif.* $\overline{\frac{f\,T}{f\,M}}$.

262 *lig.* 21 du côté *y lif.* du côté de *y*

282 *lig.* 7 dernier *lif.* premier

297 *lig.* 2 dirigée à ſon Pole, ſupprimez ces mots.

309 *lig.* 24 moitié l'Arc *lif.* moitié de l'Arc.

Fautes non-eſſentielles.

Pag. 16 *lig.* 15 trausformés *lif.* transformés

22 *lig.* 15 nne *lif.* une

28 *lig.* 21 eette *lif.* cette

33 *lig.* 28 coupanr *lif.* coupant

38 *lig.* 25 le *lif.* la

38 *lig.* 33 enſin *lif.* enfin

57 *lig.* 24 certe *lif.* cette

36 *lig.* 16 alternes, internes *lif.* alternes internes

69 *lig.* 8 on *lif.* ou

84 *lig.* 27 détetminée *lif.* déterminée

97 *lig.* 9 la *lif.* le

101 *lig.* 25 l'horiſon *lif.* l'horiſon

Pag. 121 *lig.* 32 brûlant *lif.* brulant
125 *lig.* 34 Parabolique *lif.* de Miroir parabolique
136 *lig.* 11 membre *lif.* membre
137 *lig.* 25 an *lif.* au
147 *lig.* 16 extrêmisé *lif.* extrêmité
160 *lig.* 26 contruire *lif.* conſtruire
190 *lig.* 20 le le *lif.* le
194 *lig.* 23 puiſqne *lif.* puiſque
197 *lig.* 7 explique *lif.* expliqué
211 *lig.* 5 ptoportionel *lif.* proportionel
211 *lig.* 28 portionel *lif.* proportionel
226 *lig.* 20 l'Hyperbobe *lif.* l'Hyperbole
226 *lig.* 27 toujouts *lif.* toujours
255 elle eſt fauſſement marquée 245
255 *lig.* 24 Cor. *lif.* 96. Cor.
284 *lig.* 29 Vaiſſeanx *lif.* Vaiſſeaux
285 *lig.* 29 préſentemeut *lif.* préſentement
287 *lig.* 13 maintenaut *lif.* maintenant
303 & 304 elles ſont marquées fauſſement 203, 204

TRAITÉ

TRAITÉ DES COURBES.

DU CALCUL DES PUISSANCES Par leurs Expoſans.

AVERTISSEMENT. *Les deux Calculs ſuivans, celui des Puiſſances par leurs Expoſans, & celui des Radicaux, ſont indiſpenſables pour ceux qui veulent connoître la haute Géométrie des modernes, & très-commodes dans l'étude de celle des anciens. Néanmoins les commençans pourront abſolument s'en paſſer ici; la plus grande partie de cet Ouvrage pouvant être entendue ſans un pareil ſecours.*

1. On enſeigne dans ce chapitre ce que l'on doit faire touchant les *Expoſans* des *Puiſſances*, ſoumiſes aux opérations du calcul.

L'*Expoſant* d'une grandeur eſt une quantité quelconque, par laquelle on a coutume d'exprimer combien de fois cette grandeur devroit être écrite, ſi l'on n'employoit pas un pareil ſigne. Ainſi, quand cet Expoſant eſt un *Entier*, il indique toujours une multiplication. L'on ne ſçauroit donc augmenter un *Expoſant*, ſans multiplier la grandeur à laquelle il appartient; & par conſéquent le diminuer, ſans diviſer cette même grandeur. Et, comme l'élévation

à des *Puiſſances* & l'extraction des *Racines*, ne ſe font que par des multiplications & des diviſions, il s'enſuit que l'on ne peut agir ſur des *Expoſans*, que quand on propoſe d'en multiplier les *Puiſſances*, de les diviſer, de les élever à d'autres Puiſſances, ou enfin d'en extraire les Racines.

2. REMARQUE. Toute grandeur, qui ne paroît élevée à aucune *Puiſſance*, eſt toujours cenſée avoir l'unité pour *Expoſant*; ainſi $b = b^1$; $cd = c^1 d^1$; $\overline{a+b} = \overline{a+b}^1$.

3. *Pour multiplier les Puiſſances d'une même Racine, leſquelles ont pour Expoſans des nombres entiers, on écrira une ſeule fois cette Racine, & on lui donnera pour Expoſant la ſomme des Expoſans des Puiſſances qui ſe multiplient.* Ainſi $y^2 \times y^4 = y^{2+4} = y^6$; car $y^2 = yy$, & $y^4 = yyyy$; donc $y^2 \times y^4 = yy \times yyyy = y^6$; par conſéquent la Règle propoſée eſt très-évidente, & très-certaine : C'eſt pourquoi, ſi les *Expoſans* ſont indéterminés, on en indiquera la ſomme par le ſigne $+$; c'eſt-à-dire que $y^r \times y^s = y^{r+s}$.

4. D'où il ſuit que, *pour diviſer des Puiſſances ſemblables aux précédentes, il faut ſouſtraire l'Expoſant de la Puiſſance, qui fait la fonction de Diviſeur, de l'Expoſant de la Puiſſance à diviſer, & donner pour Expoſant à la Racine le reſte de cette ſouſtraction.* Voulez-vous diviſer c^5 par c^3? Vous n'avez qu'à écrire $c^{5-3} = c^2$, qui ſera le Quotient cherché; puiſque le Diviſeur c^3 multiplié par le Quotient $c^2 = c^{3+2}$ (3) = le Dividende c^5. Donc, en général, c^s diviſé par $c^r = \frac{c^s}{c^r} = c^{s-r}$.

5. Soit dans l'exemple précédent $r = s$ on aura $c^{s-r} = c^{s-s} = c^0$: mais (4) $c^{s-r} = \frac{c^s}{c^r} = \frac{c^s}{c^s} = 1$. donc $c^0 = 1$. On voit par-là que *toute grandeur quelconque, élevée à nulle Puiſſance, ou dont la Puiſſance eſt zéro, devient égale à l'unité.*

6. Si l'on ſuppoſoit donc l'Expoſant $s = 0$, on auroit $\frac{c^s}{c^r} = \frac{c^0}{c^r} = c^{0-r}$ (4) $= c^{-r}$. Ce qui démontre qu'*une Puiſſance peut avoir un Expoſant négatif.* Mais alors elle exprime une véritable Fraction; quoiqu'elle n'en ait pas la forme.

Car $c^0 = 1$ (5); donc $\frac{c^0}{c^r} = \frac{1}{c^r}$; mais on vient de voir que $\frac{c^0}{c^r} = c^{-r}$; donc $c^{-r} =$ la Fraction $\frac{1}{c^r}$.

7. Un Exposant positif peut donc être transformé en négatif, & réciproquement, sans que sa Puissance change de valeur. Car 1°. $\frac{1}{c^r} = c^{-r}$ (6). 2°. Je dis que $c^r = \frac{1}{c^{-r}}$; puisque $\frac{1}{c^r} = c^{-r}$ (6); donc $1 = c^r \times c^{-r}$; par conséquent $\frac{1}{c^{-r}} = c^r$.

8. Pareillement $d^4 f^{-3}$ peut devenir $\frac{d^4}{f^3}$. Car f^{-3} étant $= \frac{1}{f^3}$ (6), $d^4 \times f^{-3} = d^4 \times \frac{1}{f^3} = \frac{d^4}{f^3}$. La même grandeur $d^4 f^{-3}$ peut aussi devenir $= \frac{f^{-3}}{d^{-4}}$. Puisque d^4 égalant $\frac{1}{d^{-4}}$ (7), on aura $d^4 f^{-3} = \frac{1}{d^{-4}} \times f^{-3} = \frac{f^{-3}}{d^{-4}}$. On peut encore transformer cette même grandeur $d^4 f^{-3}$ en $\frac{1}{d^{-4} f^3}$. Car $d^4 = \frac{1}{d^{-4}}$ (7), & $f^{-3} = \frac{1}{f^3}$ (6); donc $d^4 f^{-3} = \frac{1}{d^{-4}} \times \frac{1}{f^3} = \frac{1}{d^{-4} f^3}$.

On employe ces Transformations, quand on veut reconnoître dans un Calcul, si des grandeurs sont semblables, quoiqu'elles ne le paroissent pas.

9. Puisque les Puissances peuvent avoir des Exposans négatifs (6), il est à propos de voir comment elles se multiplient ou se divisent à cet égard. Il n'y a pas d'autres Règles à suivre que celles des n°. 3. & 4. Ainsi, pour multiplier d^{-2} par d^{-3}, on écrira $d^{-2} \times d^{-3} = d^{-2-3} = d^{-5}$ (3). Pa-

reillement $d^{-r}\times d^{-s}=d^{-r-s}$. Car $d^{-r}=\frac{1}{d^r}$ & $d^{-s}=\frac{1}{d^s}$ (6); ainſi $d^{-r}\times d^{-s}=\frac{1}{d^r}\times\frac{1}{d^s}=\frac{1}{d^r\times d^s}=\frac{1}{d^{r+s}}$ (3) $=d^{-r-s}$ (6). Voulez-vous encore multiplier d^4 par d^{-5} ? Vous aurez $d^4\times d^{-5}=d^{4-5}=d^{-1}$; puiſque $d^{-5}=\frac{1}{d^5}$ (6) ; donc $d^4\times d^{-5}=d^4\times\frac{1}{d^5}=\frac{d^4}{d^5}=d^{4-5}=d^{-1}$.

10. De même, en ſuivant la Règle établie & démontrée n°. 4. on diviſera avec une extrême facilité les Puiſſances, dont les Expoſans ſeront négatifs, ſoit au Dividende, ſoit au Diviſeur. Pour diviſer donc d^{-5} par d^{-3}, on écrira $\frac{d^{-5}}{d^{-3}}=d^{-5+3}=d^{-2}$, qui ſera le Quotient cherché. De ſorte que les Expoſans étant indéterminés ; c'eſt-à-dire, ayant par exemple d^{-r} à diviſer par d^{-s}, on écrira $\frac{d^{-r}}{d^{-s}}=d^{-r+s}$ pour le Quotient de cette Diviſion ; puiſque ce Quotient d^{-r+s}, multiplié par le Diviſeur d^{-s}, $=d^{-r+s-s}=$ le Dividende d^{-r}. On trouvera encore que d^r diviſé par $d^{-s}=\frac{d^r}{d^{-s}}=d^{r+s}$; car $d^{r+s}\times d^{-s}=d^{r+s-s}$ (9) $=d^r$. Et, ſi l'on diviſoit d^{-r} par d^s, on auroit au Quotient d^{-r-s} ; puiſque $d^{-r-s}\times d^s=d^{-s-r+s}=d^{-r}$.

11. Moyennant le Calcul des Puiſſances par leurs Expoſans, on peut délivrer du ſigne radical $\sqrt{}$ une grandeur qui en ſeroit affectée. Mais il eſt néceſſaire de voir auparavant, & d'être convaincu par une bonne démonſtration que, *pour élever une Puiſſance quelconque y^s à un degré quelconque, dont l'Expoſant r ou $-r$ eſt poſitif ou négatif, il faut multiplier l'Expoſant s de la Puiſſance propoſée par l'Expoſant donné r ou $-r$; & faire que ce produit devienne l'Expoſant de cette même Puiſſance.* Ainſi y^s élevée à la Puiſſance $r=y^{rs}$; & y^s élevée à la Puiſſance $-r=y^{-rs}$. Ce que je démontre ainſi.

I. y^s élevée à la Puiſſance poſitive r, doit néceſſairement devenir y^{rs}. Car en élevant y^s à la Puiſſance poſitive r, on la multiplie par elle-même autant de fois, moins une, qu'il y a d'unités dans r; c'eſt-à-dire que l'on écrit cette Puiſſance autant de fois que la lettre r eſt ſuppoſée contenir d'unités; de ſorte qu'elle devient $y^s \times y^s \times y^s \times y^s$, &c. où y^s ſe trouve écrite autant de fois que l'on ſuppoſe d'unités dans r; mais $y^s \times y^s \times y^s \times y^s$, &c. $= y^{s+s+s+s}$, &c. (3), dans laquelle expreſſion l'Expoſant s doit ſe trouver écrit ou pris autant de fois que la lettre r contient d'unités; or, pour prendre s autant de fois que r contient d'unités, il faut multiplier s par r; donc, en ce cas, $y^{s+s+s+s}$, &c. $= y^{rs}$. Et vous vous convaincrez en particulier de la vérité de cette aſſertion, en élevant la grandeur a^3 à la quatriéme ou à toute autre Puiſſance déterminée; puiſqu'alors il faut écrire $a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12}$ ou $a^{3\times4}$, ainſi que la Règle générale le preſcrit.

II. y^s élevée à la Puiſſance négative $-r$ eſt $= y^{-rs}$. On doit ſe rappeller pour cela que $y^s = yyyy$, &c. où la lettre y doit être écrite autant de fois que l'on ſuppoſe d'unités dans l'Expoſant s: ainſi en élevant y^s ou ſon égale $yyyy$, &c. à la Puiſſance $-r$, on doit écrire $yyyy$, &c.$^{-r}$; ce qui ſignifie que la grandeur propoſée eſt cenſée élevée à la Puiſſance $-r$. Mais $yyyy$, &c.$^{-r} = \frac{1}{yyyy, \text{&c.}^r}$ (6), & $\frac{1}{yyyy, \text{&c.}^r} = \frac{1}{y^{rs}}$ élevée à la Puiſſance poſitive rs; puiſque $yyyy$, &c. $= y^s$; or $\frac{1}{y^s}$ élevé à la Puiſſance $r = \frac{1}{y^{rs}}$ (art. 1.): car 1 élevé à une Puiſſance quelconque donne toujours 1; & par conſéquent, pour élever la fraction $\frac{1}{y^s}$ à la Puiſſance poſitive r, il n'y a qu'à agir ſimplement ſur ſon Dénominateur, ſuivant qu'il eſt preſcrit à l'article premier; & elle deviendra $\frac{1}{y^{rs}}$. Mais $\frac{1}{y^{rs}} = y^{-rs}$ (6); donc enfin y^s élevée

à la Puiſſance $-r = y^{-rs}$. Et, ſi vous voulez avoir la ſuite de toutes les Égalités ou Équations qui nous ont conduit à cette dernière, vous écrirez $yyyy$, &c.$^{-r} = \frac{1}{yyyy, \&c.^{r}} = \frac{1}{y^{sr}}$ * $= \frac{1}{y^{rs}}$ (art. 1.) $= y^{-rs}$ (6).

De même y^{-s} élevée à la Puiſſance négative $-r = y^{rs}$. Car $y^{-s} = \frac{1}{y^{s}}$ (6). Or, pour élever la Fraction $\frac{1}{y^{s}}$ à la Puiſſance $-r$, il faut élever ſes deux termes à la Puiſſance $-r$, & par conſéquent écrire $\frac{1^{-r}}{y^{-rs}}$ (artic. II.); mais 1^{-r} ne peut égaler que 1; puiſque $1^{-r} = \frac{1}{1^{r}}$ (6) $= \frac{1}{1} = 1$; donc $\frac{1^{-r}}{y^{-rs}} = \frac{1}{y^{-rs}} = y^{rs}$.

12. On demandera peut-être ce que ſignifie une grandeur élevée à une Puiſſance négative? C'eſt une quantité qui devient plus petite que 1; & qui eſt par conſéquent transformée en Fraction, lorſqu'avant d'être élevée au degré propoſé elle avoit un Expoſant poſitif; mais au contraire, dont la valeur devient un entier, ſi ſon Expoſant étoit négatif. Vous avez, par exemple, la grandeur a^{3}, que vous voudriez élever à la Puiſſance négative -2; il faut qu'elle devienne a^{-6} (art. II. n°. 11.) $= \frac{1}{a^{6}}$ (6). Où vous voyez que la grandeur a^{3}, qui a un Expoſant poſitif, eſt devenue plus petite que l'unité. Soit, au contraire, a^{-3} qu'il s'agit d'élever à la Puiſſance -2; on aura a^{6} (art. II. n°. 11.); c'eſt-à-dire que la grandeur a^{-3} ou $\frac{1}{a^{3}}$ qui étoit une Fraction ou plus petite que l'unité, eſt devenue plus grande que 1. Car nous ſuppoſons dans tout ceci que a eſt > 1.

* L'expreſſion y^{r} indique que la grandeur y eſt élevée à la Puiſſance r.

13. Remarquez qu'il y a une grande différence entre y^3 élevée à la quatriéme Puiſſance, & $y^3 \times y^4$. Puiſque $y^{3^4} = y^{3\times4}$ (11) $= y^{12}$; au lieu que $y^3 \times y^4 = y^{3+4}$ (3) $= y^7$, qui eſt fort différent de y^{12}. Pareillement $p^r = p^{rx} = p^{rx}$; mais $p^r \times p^t = p^{r+t}$.

14. Il nous ſera bien aiſé maintenant de délivrer du ſigne radical $\sqrt{}$ accompagné d'un Expoſant quelconque, toute grandeur qui en ſeroit affectée, telle que $\sqrt[s]{y^p}$, ſans en changer la valeur: Car puiſque, pour élever une grandeur à une Puiſſance quelconque, il faut (11) multiplier ſon Expoſant par celui de la Puiſſance propoſée, l'extraction des *Racines* étant contraire à l'élévation aux *Puiſſances*, pour tirer la Racine s de y^p, il faudra diviſer l'Expoſant de cette grandeur par l'Expoſant donné s; & par conſéquent $\sqrt[s]{y^p} = y^{\frac{p}{s}}$, où il n'y a plus de Radical. Effectivement $y^{\frac{p}{s}}$, élevée à la Puiſſance s, $= y^{\frac{p}{s}\times s}$ (11) $= y^p$; comme cela doit être.

Pareillement $\sqrt[2]{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$, comme on le ſçait d'ailleurs. $\sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}} = x^1 = x$. Ce que l'on ſçait encore être très-véritable. De même $\sqrt[2]{x}$, ou $\sqrt{x^1} = x^{\frac{1}{2}}$.

Puis donc qu'une grandeur peut avoir pour Expoſant une Fraction, il eſt à propos d'en ſçavoir faire la multiplication & la diviſion.

15. On ſe conduira pour la multiplication de ces grandeurs, comme au n°. 3. Ainſi $y^{\frac{s}{p}} \times y^{\frac{m}{n}} = y^{\frac{s}{p}+\frac{m}{n}}$ (A) $= y^{\frac{ns+mp}{np}}$, en réduiſant à la même dénomination les deux termes de l'Expoſant de la grandeur A.

Voulez-vous pareillement multiplier $y^{\frac{n}{s}}$ par $y^{-\frac{m}{t}}$? Vous aurez $y^{\frac{n}{s}-\frac{m}{t}}$ (9) $= y^{\frac{nt-ms}{st}}$. Et, ſi vous aviez $y^{-\frac{n}{s}}$ à multiplier par $y^{-\frac{m}{t}}$, le produit ſeroit $y^{-\frac{n}{s}-\frac{m}{t}} = y^{-\frac{nt+ms}{st}}$.

16. Quant à la diviſion des grandeurs ſemblables aux précédentes, on ſe conformera à la Règle du n°. 4. On verra donc que $y^{\frac{s}{p}}$ diviſé par $y^{\frac{m}{n}} = y^{\frac{s}{p}-\frac{m}{n}} = y^{\frac{ns-pm}{np}}$.

Vous trouverez pareillement que $y^{\frac{s}{p}}$ diviſé par $y^{-\frac{m}{n}} = y^{\frac{s}{p}+\frac{m}{n}} = y^{\frac{ns+pm}{np}}$. Et que $y^{-\frac{s}{p}}$ diviſé par $y^{\frac{m}{n}} = y^{-\frac{s}{p}-\frac{m}{n}} = y^{-\frac{ns-pm}{np}}$. Enfin $y^{-\frac{s}{p}}$ diviſé par $y^{-\frac{m}{n}} = y^{-\frac{s}{p}+\frac{m}{n}} = y^{-\frac{ns+pm}{np}}$.

17. Il eſt bon que l'on ſoit prévenu qu'en transformant une grandeur affectée du ſigne Radical $\sqrt{}$ en une autre qui en ſoit délivrée, par exemple, en faiſant que $\sqrt[3]{a+b}$ devienne $\overline{a+b}^{\frac{1}{3}}$, l'on peut approcher à l'infini de la Racine cubique de la grandeur $a+b$, & tomber dans ce que l'on appelle le Calcul des *Suites*, ſi utiles dans la Géométrie, où l'on employe les Calculs *Différentiel* & *intégral* : Mais n'ayant pas beſoin ici de ces connoiſſances, je paſſe tout de ſuite au Calcul des *Radicaux*, ſi commode dans la Géométrie analytique.

Du Calcul des Radicaux.

18. UN *Radical* eſt une grandeur affectée du ſigne $\sqrt{}$, entre les branches duquel on écrit un chiffre ou une grandeur quelconque, à laquelle on a donné le nom d'*Expoſant*, parce qu'il indique de quel degré eſt la Racine, que l'on ſuppoſe extraite ou à extraire par le ſigne Radical $\sqrt{}$. Ainſi $\sqrt[2]{x}$ ou ſimplement $\sqrt{x}$ déſigne la Racine quarrée ou ſeconde de x. Pareillement $\sqrt[5]{b^2-x^2}$ exprime la Racine cinquiéme de b^2-x^2. En un mot,

$\sqrt[s]{y}$ indique la Racine indéterminée s de la grandeur y, &c.

19. Quand l'Expoſant d'un Radical eſt le même que celui de la Puiſſance poſitive qui eſt ſous le ſigne Radical, ou quand cette grandeur eſt une Puiſſance parfaite, du même degré que l'Expoſant du ſigne, cette quantité peut être délivrée du ſigne Radical. Ainſi $\sqrt{xx} = x$; $\sqrt{16}$ ou $\sqrt[2]{4^2} = 4$; $\sqrt[3]{27}$ ou $\sqrt[3]{3^3} = 3$; $\sqrt{aa - 2ac + cc}$ ou $\sqrt[2]{\overline{a-c}^2} = a - c$. Ce qui eſt évident.

20. Une grandeur peut donc prendre la forme d'un Radical quelconque, ſans changer de valeur; pourvu que l'on élève cette grandeur à la Puiſſance du même degré que l'Expoſant du Radical dont elle ſera affectée. Soit la grandeur b^2x, que vous voudriez transformer en Radical du même degré que $\sqrt[3]{s}$. Élevez b^2x au Cube, ou à la troiſiéme Puiſſance, & la mettant ſous le ſigne $\sqrt[3]{}$, vous aurez $b^2x = \sqrt[3]{b^6x^3}$, qui a le même ſigne Radical que $\sqrt[3]{s}$. Ce qui eſt encore tout-à-fait évident (19).

21. Il ſuit encore du n°. 19. qu'une grandeur dont les *Facteurs*, (c'eſt-à-dire les quantités qui concourent à ſa formation par voye de multiplication) ſont tels que les uns ont le même Expoſant que celui de ſon Radical, & les autres ne l'ont pas; que cette grandeur, dis-je, peut être délivrée en partie du ſigne Radical.

I. Ainſi $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$, où il n'y a plus que le Facteur b affecté du ſigne Radical: car deux grandeurs ſont égales, quand élevées à la même Puiſſance elles donnent des Produits égaux; or en élevant au Cube ou à la troiſiéme Puiſſance $\sqrt[3]{a^3b}$, on a la grandeur a^3b; puiſque $\sqrt[3]{a^3b}$ ſignifie que l'on tire la Racine cubique de a^3b; on ſuppoſe donc que cette grandeur eſt un Cube: ainſi, en lui ôtant le Radical $\sqrt[3]{}$ dans l'expreſſion $\sqrt[3]{a^3b}$, elle ſera par cela

ſeul élevée à la troiſiéme Puiſſance ; par conſéquent a^3b eſt le Cube de $\sqrt[3]{a^3b}$.

II. Je dis pareillement que a^3b eſt le Cube de $a\sqrt[3]{b} = a \times \sqrt[3]{b}$; puiſque l'on ne ſçauroit élever au Cube une grandeur, à moins que tous ſes Facteurs n'y ſoient élevés ; par éxemple $\overline{bcx}^3 = b^3c^3x^3$; par conſéquent dans la grandeur $a \times \sqrt[3]{b}$, que l'on ſe propoſe d'élever au Cube, la quantité a deviendra a^3, & $\sqrt[3]{b}$ deviendra b (art. I.) ; par conſéquent le Cube de $a\sqrt[3]{b}$ eſt a^3b ; mais cette même grandeur eſt auſſi le Cube de $\sqrt[3]{a^3b}$. Donc $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$. De même vous verrez que $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$; & que $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \times 2} = 3\sqrt{2}$, &c.

22. On peut donc faire paſſer ſous le ſigne Radical une grandeur qui, en étant délivrée, en multiplie une autre que ce ſigne affecte, ſans que le Produit de ces grandeurs en ſoit aucunement altéré ; pourvu que la quantité que l'on fait paſſer ſous le ſigne, étant élevée à la Puiſſance marquée par l'Expoſant du Radical, multiplie celle qui eſt ſous le Radical ; puiſque l'on vient de voir (21) que $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3b}$. Pareillement $\overline{a - b}\sqrt{c} = \sqrt{\overline{aa - 2ab + bb} \times c} = \sqrt{a^2c - 2abc + b^2c}$, où l'on a fait paſſer la grandeur $a - b$ ſous le ſigne Radical, en l'élevant à la ſeconde Puiſſance, & la multipliant par la quantité c qui eſt ſous le ſigne. Il faut prendre garde à ces transformations, elles facilitent beaucoup le Calcul des *Radicaux*. Ayant donc $4\sqrt{5}$, vous pourrez en faire $\sqrt{4^2 \times 5} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{80}$, ſans rien changer à la valeur de $4\sqrt{5}$.

23. Mais il y a des grandeurs dont on ne peut tirer la

Racine d'un degré quelconque, ni en entier ni en partie; c'eſt-à-dire que l'on ne peut pas à la rigueur délivrer de leur Radical. Telles ſont $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, &c. que l'on appelle *incommenſurables*, c'eſt-à-dire qui n'ont aucune commune meſure avec l'unité, ou avec quelque partie de l'unité; de ſorte qu'il n'y a aucun nombre, ſoit entier ou fraction, qui ſoit la Racine quarrée de 5. ainſi que je l'ai démontré au n°. 72. Algeb. des *Inſt. T.* 1. Cependant, quoiqu'il y ait des quantités dont on ne puiſſe avoir la Racine à toute rigueur, j'ai fait voir dans mes *Inſtitutions*, que l'on pouvoit en approcher à l'infini; & qu'ainſi l'on avoit à cet égard un ſupplément qui alloit bien au-delà des beſoins de la ſociété.

24. On trouve même quelquefois des quantités radicales, dont l'approximation de la Racine eſt impoſſible, & dont la recherche ſeroit abſurde. Ainſi $\sqrt{-a^2}$ n'eſt ni ne peut être $+a$ ou $-a$; car $+a$ ou $-a$ élevé au quarré, ne produira jamais $-a^2$. De même $\sqrt{-9}$ n'eſt ni 3 ni -3; puiſque 3×3 ou -3×-3 donnent 9, & non pas -9. C'eſt pourquoi ces ſortes de grandeurs s'appellent *imaginaires*, & l'on jugera qu'une quantité eſt *imaginaire*, toutes les fois qu'étant négative, elle ſe trouvera ſous un ſigne Radical dont l'Expoſant ſera un nombre pair; par exemple $\sqrt[6]{-a^6}$, $\sqrt[4]{-a^4}$, &c. ſont des grandeurs *imaginaires*; parce qu'aucune grandeur poſitive ou négative, multipliée par elle-même en nombre pair, ne peut jamais donner un produit négatif.

25. Mais que ſignifie une grandeur *imaginaire*, pourquoi l'admettre dans le Calcul? Quand on propoſe la réſolution d'un Problême, celui qui la tente ne ſçait pas d'abord ſi on lui a propoſé une choſe poſſible ou abſurde; il eſt donc obligé d'exprimer toutes les conditions de la queſtion, quoiqu'il y en ait peut-être qui ſe contrediſent ſans qu'on s'en apperçoive; & ſi, après avoir comparé tout ce qui pouvoit le conduire à la réſolution qu'il cherche, il

arrive à un réſultat exprimé *imaginairement*; il eſt sûr, & il peut démontrer qu'on lui a fait une queſtion abſurde, & que par conſéquent le Problême eſt réſolu. Comme je l'ai fait voir dans mes *Inſtit.*

26. Les grandeurs *imaginaires* peuvent donc & doivent entrer dans le Calcul; elles peuvent même devenir *réelles* en détruiſant l'impoſſibilité qui les empêchoit d'être telles. -4 eſt une grandeur *réelle* & très-poſſible, puiſque l'on peut être 4 au-deſſous de 0 ou de rien; tel eſt l'état d'un homme qui n'ayant rien doit 100#; il a 100# moins que rien, puiſqu'en lui donnant 100#, il ſeroit encore dans l'état de rien. Si l'on propoſoit donc d'extraire la Racine quarrée de -4, dont l'expreſſion ſeroit $\sqrt{-4}$, on demanderoit une choſe abſurde, & $\sqrt{-4}$ ſeroit une *imaginaire*, qui pourroit devenir *réelle* en la multipliant par elle-même, c'eſt-à-dire, en détruiſant l'abſurdité qui l'empêche d'être *réelle*; de ſorte que $\sqrt{-4} \times \sqrt{-4} = -4$. Car, comme c'eſt le Radical $\sqrt{}$ qui fait uniquement l'abſurdité de l'expreſſion $\sqrt{-4}$, la ſeule ſuppreſſion de ce Radical rendra *réelle* la grandeur qui eſt deſſous. On ne doit donc point s'étonner dans la ſuite, ſi l'on voit que des *imaginaires* ſe calculent, & même qu'elles deviennent *réelles*.

27. Remarquez bien qu'il y a une fort grande différence entre une grandeur *imaginaire* & une grandeur égale à rien ou à zéro; parce qu'une grandeur égale à rien n'eſt pas abſurde; il eſt poſſible qu'une quantité ſoit détruite par une autre, au lieu qu'une grandeur *imaginaire* eſt une quantité abſurde, ou qui emporte contradiction. Vous ne pourrez pas dire qu'une *imaginaire* puiſſe être conſidérée comme zéro, c'eſt quelque choſe de pis; de même une grandeur égale à zéro ne peut pas être priſe pour une *imaginaire*, puiſqu'il n'eſt pas abſurde qu'une grandeur devienne zéro.

28. Moyennant les conſidérations précédentes, on peut quelquefois ſimplifier ou *réduire à ſa plus ſimple expreſſion*

une grandeur Radicale : par exemple $\sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = \sqrt{3^2\times 3} = 3\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27\times 2} = \sqrt[3]{3^3\times 2} = 3\sqrt[3]{2}$. Pareillement $\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{64\times 3} = \sqrt[3]{4^3\times 3} = 4\sqrt[3]{3}$ (21). De même $\sqrt[4]{a^4c - a^4b} = \sqrt[4]{a^4\times c-b} = a\sqrt[4]{a-b}$; on aura encore $\sqrt[2]{c^2s - 2bcs + b^2s} = \sqrt[2]{c^2 - 2bc + b^2}\times s = c-b\sqrt{s}$, &c. De ſorte que, *pour réduire un Radical à ſa plus ſimple expreſſion, il faut tirer la Racine des Facteurs de la grandeur ſous le ſigne, leſquels ſont élevés à une Puiſſance du même degré que celui de l'Expoſant du Radical ; laiſſer les autres Facteurs ſous le Radical, & multiplier ce ſigne par la Racine trouvée :* ainſi qu'on l'a démontré au n°. 21.

29. Ceci nous montre comment l'on peut transformer une quantité Radicale, qui a une Fraction ſous le ſigne, en une autre de même valeur, dont la Puiſſance ſous le ſigne ſoit un entier : car, en faiſant que le Dénominateur de cette Fraction ſoit une Puiſſance parfaite du même degré que l'Expoſant du Radical, on pourra, par l'extraction des Racines, ou en réduiſant à la plus ſimple expreſſion, dégager de la grandeur qui eſt ſous le ſigne, la quantité par laquelle cette grandeur eſt déterminée à être une Fraction. Ainſi $\sqrt{\frac{5}{8}}$ peut avoir un entier ſous le ſigne ſans changer de valeur. Vous n'avez qu'à multiplier le Numérateur & le Dénominateur de cette Fraction par 8, & vous aurez $\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{5\times 8}{8\times 8}} = \sqrt{40\times\frac{1}{8\times 8}} = \frac{1}{8}\sqrt{40}$ (28). Vous transformerez par une ſemblable méthode la grandeur $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, en élevant au Cube le Dénominateur de la Fraction $\frac{2}{3}$; c'eſt-à-dire en multipliant le Numérateur & le Dénominateur de cette Fraction par le quarré de ſon Dénominateur ; & vous aurez $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2\times 3\times 3}{3\times 3\times 3}} = \sqrt[3]{18\times\frac{1}{3\times 3\times 3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{18}$ (21). Enfin $\sqrt[4]{\frac{bd}{c}}$ pourra devenir $\sqrt[4]{\frac{bd\times c^3}{c\times c\times c\times c}} = \sqrt[4]{bc^3d\times\frac{1}{c^4}} = \frac{1}{c}\sqrt[4]{bc^3d}$, &c.

30. Il peut arriver auſſi qu'une grandeur Radicale ne change point de valeur, quoique l'Expoſant de ſon ſigne Radical ſoit transformé en un autre; pourvu que la quantité, qui eſt ſous le ſigne, ſoit élevée en même-tems au degré qu'indique le nombre par lequel on a multiplié l'Expoſant du Radical pour le transformer. Voudriez-vous, par exemple, que l'Expoſant de $\sqrt[3]{b}$ fût 6? Multipliez l'Expoſant 3 par 2; élevez après cela la grandeur b au quarré ou au ſecond degré, & vous aurez $\sqrt[3]{b} = \sqrt[3\times2]{b^2} = \sqrt[6]{b^2}$, lequel a pour Expoſant le nombre 6 que l'on demandoit. Pareillement s'agit-il de transformer $\sqrt[4]{c}$ en un autre dont l'Expoſant ſoit 12? On multipliera par 3 l'Expoſant 4, & l'on élèvera la grandeur c au troiſiéme degré; ce qui donnera $\sqrt[4]{c} = \sqrt[4\times3]{c^3} = \sqrt[12]{c^3}$, où l'on voit l'Expoſant demandé.

DÉM. Il s'agit de prouver généralement que $\sqrt[s]{b} = \sqrt[sx]{b^x}$: Or cela eſt évident; car (14) $\sqrt[s]{b} = b^{\frac{1}{s}}$, & $\sqrt[sx]{b^x} = b^{\frac{x}{sx}} = b^{\frac{1}{s}}$: Démonſtration qui ſaute aux yeux.

31. Cette transformation eſt fort commode pour donner le même Expoſant à deux ſignes *Radicaux* qui ne l'ont pas, tels que $\sqrt[3]{c}$, $\sqrt[4]{f}$; puiſque $\sqrt[3]{c} = \sqrt[3\times4]{c^4}$, & $\sqrt[4]{f} = \sqrt[4\times3]{f^3}$ (30); par conſéquent, en prenant en la place des deux *Radicaux* propoſés, les grandeurs $\sqrt[12]{c^4}$ & $\sqrt[12]{f^3}$ qui leurs ſont égales, on aura des *Radicaux* dont l'Expoſant eſt le même. *Afin donc que deux ſignes Radicaux, qui n'ont pas le même Expoſant, parviennent à l'avoir, il faut multiplier l'Expoſant du premier par celui du ſecond, & élever la grandeur ſous le ſigne du premier à la Puiſſance indiquée par l'Expoſant du ſecond; & réciproquement multiplier l'Expoſant du ſecond par celui du premier, & élever la grandeur ſous le ſigne du ſecond à la Puiſſance indiquée par l'Expoſant du premier.*

32. Cette Régle n'eſt ſujette à exception, qu'en ce qu'on

peut la ſimplifier, lorſque les Expoſans des *Radicaux* ont un Diviſeur commun. Alors, après avoir diviſé ces Expoſans par leur plus grand commun Diviſeur, les Quotiens qui en proviendront, multiplieront réciproquement les Expoſans des Radicaux propoſés; & les grandeurs ſous le ſigne Radical, ſeront élevées au degré indiqué par le nombre qui aura multiplié l'Expoſant de leur Radical. Par éxemple: les Radicaux $\sqrt[6]{b}$ & $\sqrt[9]{c}$ ayant 3 pour leur plus grand commun Diviſeur, on diviſera 6 par $3 = 2$, & enſuite 9 par $3 = 3$; après quoi multipliant l'Expoſant 6 du premier Radical par le ſecond Quotient 3, & l'Expoſant 9 du ſecond Radical par le premier Quotient 2, on aura $\sqrt[6]{6} = \sqrt[6\times3]{b^3} = \sqrt[18]{b^3}$, & $\sqrt[9]{c} = \sqrt[9\times2]{c^2} = \sqrt[18]{c^2}$; moyennant quoi $\sqrt[6]{b}$ & $\sqrt[9]{c}$ ſeront transformées en $\sqrt[18]{b^3}$, & $\sqrt[18]{c^2}$, dont le ſigne Radical a le même Expoſant, ſans que les Radicaux ayent changé de valeur (30).

Dém. Quant à la manière dont on ſe comporte à l'égard des grandeurs qui ſont ſous le ſigne Radical, elle tire ſa Démonſtration du n°. 30. Il reſte donc à faire voir, pour les Expoſans, que deux grandeurs différentes deviendront égales, ſi après les avoir diviſées par leur plus grand commun Diviſeur, on multiplie la première par le ſecond Quotient, & la ſeconde par le premier. Soient a, c deux grandeurs, & d leur plus grand commun Diviſeur. Suppoſons que $\frac{a}{d} = p$, & $\frac{c}{d} = r$; il faut démontrer que $a \times r = c \times p$. Or cela eſt manifeſtement certain; car, puiſque $\frac{a}{d} = p$, on aura $a = dp$, & par la même raiſon, $c = dr$. Donc $a \times dr = c \times dp$; ainſi, en diviſant par d, $a \times r = c \times p$.

33. Ce que l'on vient d'expoſer dans les n°. 31. & 32. peut ſervir à faire découvrir avec facilité, ſi deux grandeurs *incommenſurables*, priſes ſéparément, ne ſeroient pas *commenſurables* entr'elles, ou en les comparant l'une avec l'autre; c'eſt-à-dire, ſi elles ne ſeroient pas entr'elles, comme un nombre entier ou rompu eſt à un autre nombre entier

ou rompu ; car, en donnant le même Expoſant aux ſignes Radicaux des grandeurs propoſées, ſi après avoir réduit le Tout à ſa plus ſimple expreſſion, on trouve préciſément la même quantité ſous les ſignes Radicaux, ces grandeurs ſeront *commenſurables*, autrement elles ne le ſeront pas. Par exemple, on trouvera par cette méthode, que $\sqrt{27}$ & $\sqrt{12}$, *incommenſurables* en elles-mêmes, ſont pourtant *commenſurables* entr'elles ; puiſqu'elles ſont entr'elles comme 3 eſt à 2 : car $\sqrt{27} = \sqrt{9\times3} = 3\sqrt{3}$ (28), & $\sqrt{12} = \sqrt{4\times3} = 2\sqrt{3}$. Donc $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2}$. Par conſéquent $\sqrt{27}$ eſt à $\sqrt{12}$ comme 3 eſt à 2.

Mais, en ſuivant ce qui eſt preſcrit au n°. 31. on trouvera que les Radicaux $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[2]{18}$, *incommenſurables* en ſoi, le ſont auſſi entr'eux ; car les Radicaux propoſés ſe réduiſent à $\sqrt[3]{2^3\times2}$, $\sqrt[2]{3^2\times2}$, leſquels trausformés en Radicaux, dont le ſigne Radical ait le même Expoſant, deviendront $\sqrt[6]{2^6\times4}$, $\sqrt[6]{3^6\times8}$ (31) de même valeur que les propoſés (30) ; mais ces dernières grandeurs, réduites à leur plus ſimple expreſſion, deviennent $2\sqrt[6]{4}$, & $3\sqrt[6]{8}$ (28), leſquelles n'ayant pas la même quantité ſous le ſigne Radical, ſont *incommenſurables* entr'elles ; puiſque, pour être comme nombre à nombre, il faudroit qu'en les comparant, on pût faire évanouir les ſignes Radicaux ; ce qui n'eſt poſſible que dans le cas, où les grandeurs ſous le ſigne ſont une même quantité.

34. *De l'Addition des Radicaux.* Nous ſuppoſerons qu'avant d'entamer cette opération, l'on ait fait ſur les Radicaux, au cas qu'il en ſoit beſoin, les préparations que nous venons d'enſeigner ; afin que l'on puiſſe juger avec plus de facilité de la ſimilitude des grandeurs de cette eſpèce ; & l'on doit bien remarquer que des grandeurs Radicales *ſemblables* ſont celles qui ont préciſément la même quantité ſous leur ſigne Radical, dont l'Expoſant eſt auſſi

le même, & qui outre cela ont des Coefficiens ſemblables; telles ſont les grandeurs $3b\sqrt{cd}$, & $5b\sqrt{cd}$; mais les quantités $a\sqrt[3]{f}$ & $a\sqrt[4]{f}$ ne ſont pas ſemblables. Cela ſuppoſé, pour faire l'Addition des Quantités $2a\sqrt{bc} - 5b\sqrt{df} + c\sqrt{f} + s$ (A) & $3c\sqrt{f} - a\sqrt{bc} - r - b\sqrt{df}$ (B), vous les diſpoſerez de manière que les termes ſemblables de l'une ſoient ſous les termes ſemblables de l'autre, comme on le voit pratiqué dans l'opération :

$$\begin{array}{l} 2a\sqrt{bc} - 5b\sqrt{df} + c\sqrt{f} + s \text{ (A)} \\ -a\sqrt{bc} - b\sqrt{df} + 3c\sqrt{f} - r \text{ (B)} \\ \hline \text{Somme....} \; a\sqrt{bc} - 6b\sqrt{df} + 4c\sqrt{f} + s - r \text{ (D)} \end{array}$$

Après quoi faiſant la réduction des termes ſemblables, on verra que la *Somme* des Polinomes A, B, eſt la quantité D.

35. *De la Souſtraction des Radicaux.* On ſe conduira ici préciſément comme dans l'opération précédente, excepté qu'on changera les ſignes des Termes du Polinome à ſouſtraire. Par conſéquent le Polinome $2\sqrt[3]{ad} - b\sqrt{fg} - a\sqrt[4]{fm} + b$ (G) ſouſtrait du Polinome $3b\sqrt{fg} - 2a\sqrt[4]{fm} + 4\sqrt[3]{ad} - d$ (M) donnera le Polinome L pour la différence cherchée,

$$\begin{array}{l} 3b\sqrt{fg} - 2a\sqrt[4]{fm} + 4\sqrt[3]{ad} - d \text{ (M)} \\ +b\sqrt{fg} + a\sqrt[4]{fm} - 2\sqrt[3]{ad} - b \text{ (G)} \\ \hline \text{Différ....} \; 4b\sqrt{fg} - a\sqrt[4]{fm} + 2\sqrt[3]{ad} - d - b \text{ (L)} \end{array}$$

ainſi que l'opération le démontre.

36. *De la Multiplication des Radicaux.* Par oppoſition aux quantités *Radicales* ou *incommenſurables*, nous appellerons dans la ſuite *grandeurs Rationelles*, celles qui ne ſeront affectées d'aucun ſigne Radical, ou qui ne ſeront multipliées par aucune grandeur Radicale. On fera encore at-

tention qu'on doit toujours ſuppoſer le *Coefficient* 1 à tout Radical délivré de Coefficiens, ainſi $\sqrt{c} = 1\sqrt{c}$.

1°. Pour multiplier donc une grandeur *Radicale* par une *Rationelle*, on eſt convenu d'écrire la Rationelle immédiatement avant la Radicale, ſans aucune autre forme, pourvu cependant que l'on obſerve les Règles de la multiplication, par rapport aux ſignes + & —. Par conſéquent $\sqrt{ab} \times c$ ou $c \times \sqrt{ab} = c\sqrt{ab}$. De même $-b \times \sqrt{df}$ ou $-\sqrt{df} \times b = -b\sqrt{df}$. Pareillement $c - d \times \sqrt{f^2 - g^2} = \overline{c-d}\sqrt{f^2-g^2}$.

2°. Mais, pour multiplier deux *Radicaux* l'un par l'autre, on commencera par donner un même Expoſant à leur ſigne Radical (31), s'ils ne l'ont pas; après quoi on multipliera l'une par l'autre les quantités, qui ſeront hors du ſigne Radical par voie de multiplication; enfin multipliant l'une par l'autre les grandeurs poſées ſous les ſignes Radicaux, on en fera précéder le produit du ſigne Radical commun, que l'on fera règner au-deſſus de toute l'étendue de ce Produit; & toute cette grandeur ainſi affectée, ſera écrite immédiatement à la ſuite du Produit des grandeurs qui ſeront hors du ſigne Radical, en obſervant toujours les Règles des ſignes + & —, ſans oublier de réduire le tout à ſa plus ſimple expreſſion. Ainſi $2b\sqrt{cd} \times 4b\sqrt{cd} = 8b^2\sqrt{c^2d^2} = 8b^2cd$ (19). Pareillement $2c\sqrt{bd} \times -3b\sqrt{bc} = -6bc\sqrt{b^2cd} = -6b^2c\sqrt{cd}$ (21). De même $-\sqrt{c-d} \times +\sqrt{c-d} = -\sqrt{\overline{c-d}^2} = -1 \times \overline{c-d}$ (19) $= -c + d$. On trouvera encore que $2a\sqrt{3bc} \times 3b\sqrt{4ab} = 6ab\sqrt{12ab^2c} = 6ab\sqrt{4b^2} \times 3ac = 12ab^2\sqrt{3ac}$ (21). On verra auſſi que $-\sqrt[4]{c^3} \times -\sqrt[4]{c} = +\sqrt[4]{c^4} = +c$ (19). Voulez-vous ſçavoir quel ſeroit le produit de $\sqrt[2]{cd} \times \sqrt[3]{c^2d}$? Transformez-les d'abord en grandeurs dont le ſigne Radical

ait le même Expoſant, & vous aurez $\sqrt[6]{c^3 d^3} \times \sqrt[6]{c^4 d^2}$ (31) $= \sqrt[6]{c^7 d^5} = \sqrt[6]{c^6 \times cd^5} = c\sqrt[6]{cd^5}$ (21). S'agit-il de multiplier l'un par l'autre les deux Radicaux $\sqrt[6]{cd}$ & $\sqrt[4]{df}$? Après avoir donné le même Expoſant à leur ſigne Radical, ils deviendront $\sqrt[12]{c^2 d^2}$ & $\sqrt[12]{d^3 f^3}$ (32), leſquels multipliés l'un par l'autre donneront $\sqrt[12]{c^2 d^5 f^3}$ pour le produit de $\sqrt[6]{cd} \times \sqrt[4]{df}$.

3°. Cependant, ſi l'on avoit une *imaginaire* à multiplier par une *imaginaire* ou par une grandeur *réelle*, il ſeroit mieux d'indiquer ſeulement la multiplication; afin que dans le cours ou le réſultat du Calcul, on pût toujours reconnoître chaque grandeur imaginaire. Ainſi, pour multiplier $\sqrt{a}$ par $\sqrt{-cc}$, on écrira $\sqrt{a} \times \sqrt{-cc}$. Pareillement le produit de $\sqrt{-c^2}$ par $\sqrt{-d^2}$ ſera $\sqrt{-c^2} \times \sqrt{-d^2}$. De même $c\sqrt{df} \times -f\sqrt{-d^2} = -cf\sqrt{df} \times \sqrt{-d^2}$. Enfin $2c\sqrt{-d^2} \times -3b\sqrt{-d^2} = -6bc\sqrt{-d^2} \times \sqrt{-d^2} = -6bc \times -d^2$ (26) $= 6bcd^2$.

Dém. Elle ſe réduit à faire voir que, quand les ſignes Radicaux ont le même Expoſant, il faut multiplier l'un par l'autre les grandeurs qui ſont ſous le ſigne Radical, & affecter ce produit du ſigne Radical commun: car il n'y a aucune difficulté pour les Quantités qui ſont hors du ſigne. Il s'agit donc de démontrer que $\sqrt{c} \times \sqrt{d} = \sqrt{cd}$. Or cela eſt évident; puiſqu'en élevant ces deux grandeurs à la Puiſſance s, vous trouverez de part & d'autre le même produit cd (Dém. du n°. 21.)

4°. Les Polinomes Radicaux n'étant compoſés que de Monomes, quand on propoſe de multiplier l'un par l'autre deux Polinomes de cette eſpèce, il eſt viſible que l'on ne doit multiplier que des Monomes autant de fois qu'il en eſt beſoin; & que par conſéquent il faut obſerver ici tout ce

que l'on a dit & démontré au n°. 36. En ſuppoſant toujours que l'on ait eu ſoin, avant de commencer l'opération, de donner le même Expoſant à tous les ſignes Radicaux. Il ſuffira donc de propoſer des éxemples.

$$\begin{array}{l} 2b\sqrt{c} + d\sqrt{f} \\ \times \\ 2b\sqrt{c} + d\sqrt{f} \\ \hline 4b^2c + 2bd\sqrt{cf} \\ \quad + 2bd\sqrt{cf} + d^2f \\ \hline 4b^2c + 4bd\sqrt{cf} + d^2f. \text{ Prod. tot.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3c + \sqrt{-d^2} \\ \times \\ 3c + \sqrt{-d^2} \\ \hline 9c^2 + 3c\sqrt{-d^2} \\ \quad - 3c\sqrt{-d^2} - 1 \times -d^2 \\ \hline 9c^2 \quad * \quad \cdot \quad + d^2 \quad \text{Prod. tot.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{fg} - \sqrt{cc - dd} \\ \times \\ \sqrt{fg} - \sqrt{cc - dd} \\ \hline fg - \sqrt{c^2fg - d^2fg} \\ \quad - \sqrt{c^2fg - d^2fg} \\ \hline fg - 2\sqrt{c^2fg - d^2fg} + c^2 - d^2. \text{ Prod. tot.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{d} - \sqrt[3]{f} \\
\times \\
\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{d} + \sqrt[3]{f} \\
\hline
\sqrt[3]{c^2} + \sqrt[3]{cd} - \sqrt[3]{cf} \\
\quad - \sqrt[3]{cd} - \sqrt[3]{d^2} + \sqrt[3]{df} \\
\quad + \sqrt[3]{cf} + \sqrt[3]{df} - \sqrt[3]{f^2} \\
\hline
\sqrt[3]{c^2} \quad * \quad - \sqrt[3]{d^2} + 2\sqrt[3]{df} - \sqrt[3]{f^2}. \text{ Pr. tot.}
\end{array}$$

37. *De la Diviſion des Radicaux.* La Diviſion étant contraire à la multiplication, tout ce qui s'eſt multiplié dans l'opération précédente, doit ſe diviſer dans celle-ci. Ainſi 1°. pour diviſer un Monome Radical par un Monome Radical ou Rationel, on commencera par les réduire à de purs Radicaux (20); &, après avoir donné le même Expoſant aux ſignes Radicaux du Dividende & du Diviſeur (31), on diviſera ſimplement les quantités, qui ſeront ſous le ſigne Radical du Dividende, par celles du Diviſeur; d'où naîtra une grandeur, laquelle affectée du ſigne Radical commun ſera le Quotient cherché. Par conſéquent, s'il s'agit de diviſer $c\sqrt{d}$ par $-\sqrt{cd}$, on écrira $\frac{c\sqrt{d}}{-\sqrt{cd}} = \frac{\sqrt{c^2d}}{-\sqrt{cd}}$ (20) $= -\sqrt{\frac{c^2d}{cd}} = -\sqrt{c}$ pour le Quotient cherché; puiſque le Diviſeur $-\sqrt{cd} \times$ le quotient $-\sqrt{c} = \sqrt{c^2d}$ (36) $=$ le Dividende $c\sqrt{d}$ (28).

Voulez-vous diviſer 3 par $\sqrt{5}$? Écrivez $\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}}$.

$(20) = \sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{9 \times \frac{1}{3}} = 3\sqrt{\frac{1}{3}}$ (21) : car $3\sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $\sqrt{\frac{9}{3}} \times \sqrt{3} = \sqrt{9}$ (36) = le Dividende 3. Pareillement, s'il s'agit de diviſer $\sqrt[3]{21}$ par 7 ; on écrira $\frac{\sqrt[3]{21}}{7} = \frac{\sqrt[3]{21}}{\sqrt[3]{7^3}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 7}{7 \times 7 \times 7}} = \sqrt[3]{\frac{3}{49}}$.

Si l'on propoſe de diviſer $-\sqrt{c^2 - d^2}$ par $-\sqrt{c+d}$ On écrira $\frac{-\sqrt{c^2-d^2}}{-\sqrt{c+d}} = +\sqrt{\frac{c-d \times c+d}{c+d}} = +\sqrt{c-d}$. Soit encore $\sqrt{c^4 d^2}$ à diviſer par $\sqrt{c^2 d}$: on écrira $\frac{\sqrt{c^4 d^2}}{\sqrt{c^2 d}} = \sqrt{\frac{c^4 d^2}{c^2 d}} = \sqrt{c^2 d} = c\sqrt{d}$. Quotient cherché (28).

Suppoſons, enfin, que l'on veuille diviſer $\sqrt[3]{cd}$ par $\sqrt[2]{cd}$. On aura $\frac{\sqrt[3]{cd}}{\sqrt[2]{cd}} = \frac{\sqrt[6]{c^2 d^2}}{\sqrt[6]{c^3 d^3}}$ (31) $= \sqrt[6]{\frac{c^2 d^2}{c^3 d^3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{cd}}$. Tout cela ſe démontre en multipliant le Quotient par le Diviſeur ; car on retrouve toujours le Dividende.

2°. Mais, ſi l'on a une Racine imaginaire à diviſer par une imaginaire, il ſuffira d'en indiquer la Diviſion, en donnant la forme de Fraction aux grandeurs propoſées, & les réduiſant toujours à leur plus ſimple expreſſion. C'eſt afin que l'on puiſſe toujours reconnoître les grandeurs imaginaires. Ainſi $\sqrt{-aa}$ diviſé par $\sqrt{-bb} = \frac{\sqrt{-aa}}{\sqrt{-bb}}$.

Pareillement $\sqrt{-4}$ diviſé par $\sqrt{-2} = \frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-2}}$. De mê-

me $cd\sqrt{-cc}$ par $-d\sqrt{-cc}$ donnera $\frac{cd\sqrt{-cc}}{-d\sqrt{-cc}}$ $= -c$ pour Quotient. On trouvera encore que $-d^2$ diviſé par $\sqrt{-d^2} = \frac{-d^2}{\sqrt{-d^2}} = \frac{\sqrt{-d^2}\times\sqrt{-d^2}}{\sqrt{-d^2}}$ $= \sqrt{-d^2}$ Quotient cherché.

3°. Quand le Dividende ſera un Polinome, tandis que le Diviſeur n'aura qu'un terme, on diviſera ſucceſſivement chaque terme du Dividende par le Diviſeur; & tous les Quotiens particuliers donneront le Quotient cherché. Voyez l'éxemple :

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{24}+\sqrt{48}-\sqrt{72} & \sqrt{6} \\ -2\sqrt{6}\text{ ou }-\sqrt{24}-\sqrt{48}+\sqrt{72} & 2+\sqrt{8}-\sqrt{12}\text{. Quotient, ou } -2\sqrt{3} \\ \quad * \quad * \quad * & \end{array}$$

Soit encore propoſé de diviſer $c\sqrt{cd} - f\sqrt{cf} - c\sqrt{df}$ par $-\sqrt{c}$. On commencera par transformer le Dividende en un Polinome, dont les termes ayent toutes leurs lettres ſous le ſigne Radical (22); ainſi qu'on le voit pratiqué en B; après quoi on opérera comme ci-deſſus.

$$\begin{array}{l|l} (B)\ \sqrt{c^3d}-\sqrt{cf^3}-\sqrt{c^2df} & -\sqrt{c} \\ -\sqrt{c^3d}+\sqrt{cf^3}+\sqrt{c^2df} & -c\sqrt{d}+f\sqrt{f}+\sqrt{cdf}\text{. Quotient.} \\ \quad * \quad * \quad * & \end{array}$$

4°. Il eſt fort poſſible que le Dividende & le Diviſeur ſoient l'un & l'autre des Polinomes; alors on ſe conduira, ſi rien ne s'y oppoſe, comme on a fait au n°. 64 Alg. Inſtit. T. 1. où l'on a donné la méthode de diviſer des quantités complèxes algébriques, qui ne renferment aucun Radical; en ſuppoſant toujours les préparations dont nous avons

parlé ci-dessus, lesquelles sont particulières aux Radicaux. Ainsi, pour diviser $c\sqrt{bc} - c\sqrt{bd} + d\sqrt{cm} - d\sqrt{dm}$ par $\sqrt{c} - \sqrt{d}$. On commencera par faire passer sous les signes Radicaux toutes les lettres qui sont au-dehors par voye de multiplication : après quoi on procédera, comme on le voit en G, où le Dividende a reçu la préparation nécessaire.

$$(G)\quad \begin{array}{l} \sqrt{bc^3} - \sqrt{bc^2d} + \sqrt{cd^2m} - \sqrt{d^3m} \\ -\sqrt{bc^3} + \sqrt{bc^2d} - \sqrt{cd^2m} + \sqrt{d^3m} \\ \hline * \quad * \quad * \quad * \end{array} \Big| \begin{array}{l} \sqrt{c} - \sqrt{d} \\ \hline c\sqrt{b} + d\sqrt{m} \end{array}$$

5°. Cependant, comme en suivant cette méthode, il arrive fort souvent, que l'on ne peut pas finir entièrement une Division de Radicaux, on a eu recours à d'autres transformations, qui sauvent quelquefois cet inconvénient. Pour en faire comprendre l'artifice, soit la grandeur $4\sqrt{7} + 3\sqrt{5}$ à diviser par $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$; en les disposant en forme de Fraction, on aura $\frac{4\sqrt{7} + 3\sqrt{5}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$: Or, il est évident que cette Fraction ne changera point de valeur, si on en multiplie le Numérateur & le Dénominateur par une même quantité ; ainsi, en les multipliant l'un & l'autre par $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$, on trouvera la nouvelle Fraction $\frac{12\sqrt{14} + 9\sqrt{10} - 8\sqrt{21} - 6\sqrt{15}}{6}$ de même valeur que la précédente. Si l'on veut donc achever la Division, après avoir divisé chaque terme du Numérateur par le Dénominateur 6, on aura $2\sqrt{14} + \frac{3}{2}\sqrt{10} - \frac{4}{3}\sqrt{21} - \sqrt{15}$ pour le Quotient cherché.

Tout l'art de ces sortes de Divisions consiste, comme on

le voit, à faire que le Diviſeur en ſoit délivré de Radicaux, moyennant quoi l'opération eſt fort ſimple : mais il n'eſt pas toujours aiſé, & il eſt quelquefois très-difficile & fort laborieux, de trouver la quantité propre à faire évanouir les ſignes Radicaux du Diviſeur. C'eſt un des ſecrets d'une ſcience très-fine, que l'on appelle *Analyſe* *, mais dont je ne traiterai point dans cet Ouvrage.

38. *Élever une grandeur Radicale à une Puiſſance donnée quelconque.* Comme cette opération ne différe en rien de la multiplication, on ſuivra à cet égard tout ce que l'on a dit & démontré au n°. 36. Ainſi on élèvera au ſecond degré une quantité Radicale, en la multipliant une fois par elle-même ; deux fois pour le troiſiéme ; trois fois pour le quatriéme, &c. Voulez-vous avoir le quarré de $\sqrt[s]{d}$? écrivez $\sqrt[s]{d} \times \sqrt[s]{d} = \sqrt[s]{d^2}$ (36) pour le quarré ou le deuxiéme degré du Radical propoſé. $\sqrt[s]{d} \times \sqrt[s]{d} \times \sqrt[s]{d} = \sqrt[s]{d^3}$ en ſera le cube ou le troiſiéme degré, &c. En général on élèvera une quantité Radicale à une Puiſſance p quelconque, en élevant à cette Puiſſance la grandeur qui ſera ſous le ſigne Radical : par conſéquent $\sqrt[s]{y}$, élevée à la Puiſſance p, $= \sqrt[s]{y^p}$. Car $\sqrt[s]{y} = y^{\frac{1}{s}}$ (14) ; or $y^{\frac{1}{s}}$, élevée à la Puiſſance p, $= y^{\frac{p}{s}}$ (11) $= \sqrt[s]{y^p}$ (14) donc, &c.

Pareillement $\sqrt[s]{y^p}$, élevée à la Puiſſance n, $= \sqrt[s]{y^{pn}}$. Puiſque $\sqrt[s]{y^p} = y^{\frac{p}{s}}$ (14) ; mais $y^{\frac{p}{s}}$, élevée à la Puiſſance n, $= y^{\frac{pn}{s}}$ (11) $= \sqrt[s]{y^{pn}}$ (14) donc, &c.

39. *De l'extraction des Racines des grandeurs Radicales.* Il ſuffit, dans cette opération, de mettre en la place de l'Expoſant du Radical propoſé, le produit de cet Expoſant

* *Analyſe*, c'eſt proprement l'art de décompoſer, ou de trouver les grandeurs qui ont concouru à la formation d'une quantité.

par celui de la Racine cherchée, & de réduire le tout à ſa plus ſimple expreſſion. Ainſi, pour avoir la Racine ſeconde de $\sqrt[3]{c}$, on écrira $\sqrt[2]{\sqrt[3]{c}}$* $= \sqrt[3\times2]{c} = \sqrt[6]{c}$. Car $\sqrt[3]{c} = c^{\frac{1}{3}}$ (14); donc, par la même raiſon, $\sqrt[2]{c^{\frac{1}{3}}} = c^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{c}$; donc auſſi $\sqrt[2]{\sqrt[3]{c}} = \sqrt[6]{c}$.

Pareillement la Racine troiſiéme de $\sqrt[5]{8} = \sqrt[5\times3]{8} = \sqrt[15]{8}$. Car, puiſque $\sqrt[5]{8} = 8^{\frac{1}{5}}$; & que $\sqrt[3]{8^{\frac{1}{5}}} = 8^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{8}$. On aura $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}} = \sqrt[15]{8}$.

De même $\sqrt[2]{\sqrt[3]{c^2}} = \sqrt[3\times2]{c^2} = \sqrt[6]{c^2} = \sqrt[3]{c}$, en le réduiſant à ſa plus ſimple expreſſion : ce qui ſe fait en diviſant par une même grandeur l'Expoſant du ſigne Radical, & celui de la quantité qui eſt ſous ce ſigne : d'ailleurs, il eſt aiſé de voir que $\sqrt[6]{c^2}$, réduit à ſa plus ſimple expreſſion, $= \sqrt[3]{c}$. Puiſque $\sqrt[6]{c^2} = c^{\frac{2}{6}} = c^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{c}$ (14).

En général, la Racine r de $\sqrt[s]{c} = \sqrt[rs]{c}$; puiſque $\sqrt[s]{c} = c^{\frac{1}{s}}$, on aura $\sqrt[r]{\sqrt[s]{c}} = \sqrt[r]{c^{\frac{1}{s}}} = c^{\frac{1}{rs}} = \sqrt[rs]{c}$ (14).

Enfin, la Racine r de $\sqrt[s]{c^r} = \sqrt[r\times s]{c^r} = \sqrt[s]{c}$. Car $\sqrt[s]{c^r} = c^{\frac{r}{s}}$. Donc $\sqrt[r]{\sqrt[s]{c^r}} = \sqrt[r]{c^{\frac{r}{s}}} = c^{\frac{r}{rs}} = c^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{c}$ (14).

40. Par où l'on voit qu'il eſt très-facile de ne donner qu'un ſeul ſigne Radical à une grandeur qui en ſeroit affec-

* $\sqrt[2]{\sqrt[3]{c}}$ Signifie la Racine ſeconde de la Racine troiſiéme de c.

tée de pluſieurs : puiſque, pour cela, il n'y a qu'à mettre en la place de l'Expoſant du ſigne Radical, ſous lequel ſe trouve la quantité Rationelle, le produit de tous les Expoſans des ſignes Radicaux. Ainſi $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}} = \sqrt[2\times3\times4]{a^3} = \sqrt[24]{a^3} = \sqrt[8]{a}$. Car $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[12]{a^3}$ (39) donc $\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}} = \sqrt[2]{\sqrt[12]{a^3}} = \sqrt[24]{a^3}$ (39) $= a^{\frac{3}{24}}$ (14) $= a^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{a}$.

Vous trouverez pareillement que $\sqrt[2]{x^2\sqrt[4]{x^3\sqrt[5]{x^4}}} = \sqrt[2\times4\times5]{x^{19}} = \sqrt[40]{x^{19}}$, en commençant par faire paſſer ſous les ſignes Radicaux, les grandeurs qui ſont au-dehors par voie de multiplication (22), & multipliant en ſuite l'un par l'autre tous les Expoſans des ſignes Radicaux, afin que leur produit ſoit l'Expoſant du ſeul ſigne Radical qui reſte (39).

Nous n'irons pas plus loin ſur ce Calcul, quoiqu'on y ait fait bien d'autres belles découvertes, d'une utilité indiſpenſable pour ceux qui voudroient s'appliquer à l'*Analyſe*, mais abſolument ſuperflues pour l'objet que nous avons ici en vûe.

De la Parabole.

1. DÉFINITIONS. Soit un Triangle quelconque HDC (fig. 1.) ; par l'un de ſes côtés HC ſoient conçûes des parallèles, telles que BS, à ſa Baſe CD. Si l'on imagine préſentement que le Triangle HDC tourne ſur le côté HD, comme ſur une charnière, enſorte qu'il faſſe une circonvolution entière, il tracera un eſpace lequel ſuppoſé Plein eſt ce que l'on nomme un *Cône* ; HD en eſt l'*Axe* ; CHF *le Triangle par l'Axe* ; le Cercle CLF *la Baſe* ; H *le Sommet*.

Il eſt clair que, dans cette circonvolution, les Lignes CD, BS, décrivent des Cercles parallèles; puiſqu'on ſuppoſe qu'elles conſervent leur paralléliſme, pendant toute la durée de leur mouvement. Si l'on ſuppoſe donc que l'on coupe un Cône par un Plan parallèle à ſa Baſe, il en naîtra un Cercle parallèle; & le Triangle HCF par l'Axe coupant ces deux Cercles, fera que leurs communes Sections BM, CF, ſeront parallèles (*369 Inſtit. T.* 2.). Or ce ſont les différentes coupes, que l'on peut faire d'un Cône, auxquelles on a donné le nom de *Sections coniques*. Quoique le Triangle & le Cercle ſoient au nombre de ces *Sections*, on ne les y met pas ordinairement; parce qu'on en ſuppoſe les propriétés connues par les *Élémens*. Ainſi nous allons expoſer ſéparément les coupes du Cône, différentes du Triangle & du Cercle. On verra dans la ſuite qu'il ne peut y en avoir que trois.

L'Hiſtoire ne nous apprend point, ſi les premiers Géomètres ſe ſont portés à la ſpéculation de ces *Sections*, par l'attrait de la curioſité ou par la force du beſoin (*a*). Mais, ſi dans les premiers tems elles ont été une production du

(*a*) Il me ſemble que la Géométrie de première néceſſité; c'eſt-à-dire, cette Géométrie indiſpenſable pour la conſervation de notre bien être dans l'état de ſociété, a dû être trouvée aſſez promptement. Tant de perſonnes ont eu à de pareilles découvertes un intérêt ſi preſſant, qu'il n'y a point du tout lieu d'être ſurpris, que les inventions les plus utiles ſoient en même-tems les plus anciennes: mais pour la Géométrie des Courbes, on ne voit pas que les premiers beſoins des hommes y ayent conduit; le ſimple néceſſaire ne demandant pas des ſpéculations ſi profondes. Il faut donc que leur origine ſoit dûe à la curioſité de l'eſprit humain, qui cherche toujours à être frappé par des ſenſations nouvelles.

Le premier Auteur des *Sections coniques*, & l'époque préciſe de leur invention, ſont également inconnus. On ſçait ſeulement que ces Courbes ſont fort anciennes. *Archimède*, qui vivoit il y a plus de deux mille ans, fait mention, dans ſes écrits, d'*Elémens de coniques*, comme de Courbes connues par ſes prédéceſſeurs. Peu de tems après lui, Apollonius de Perge travailla ſur ces *Sections* avec tant de ſuccès, qu'il en fut ſurnommé *le Grand Géomètre*. Cependant les modernes ont fait oublier *Apollonius*. Grégoire de Saint Vincent s'eſt diſtingué par la clarté de ſes démonſtrations; & j'ignore pourquoi nos Contemporains le recherchent ſi peu. Il ſemble que l'on ne connoiſſe aujourd'hui, en France, que M. de la Hire, & ſur-tout Meſſieurs Guiſnée, & de l'Hôpital; ſans doute, parce que ces derniers y ont fait uſage de l'*Algèbre*, inſtrument à découvertes le plus commode, le plus expéditif, le plus étendu, & par conſéquent le plus beau que l'eſprit humain ait jamais inventé.

premier motif, elles ſont devenues aujourd'hui le fruit du ſecond. On a découvert que la Nature agit en bien des rencontres, ſuivant les Courbes que produiſent ces *Sections*, & qu'elles ſont indiſpenſables dans la perfection des Arts : il faut donc en étudier les propriétés, ne fût-ce que pour augmenter notre bonheur.

2. PROPOSITION I. Une Perpendiculaire DA (fig. 2.) ſur un Plan BM, eſt néceſſairement Perpendiculaire ſur toutes les Lignes AB, AC, AM, &c. du Plan, menées par le pied A de cette Perpendiculaire.

DÉM. Car une Perpendiculaire ſur un Plan, eſt une Ligne qui n'incline d'aucun côté ſur le Plan, au-deſſus duquel elle eſt élevée. Or, ſi la Ligne AD n'étoit pas Perpendiculaire à toutes les Lignes, menées par ſon pied A ſur le Plan BM, il faudroit qu'elle inclinât de quelque côté. Ce qui eſt contre la ſuppoſition. Donc, &c. C. Q. F. D.

3. PROPOS. II. D'un Point A, pris dans un Plan, on ne ſçauroit élever qu'une Perpendiculaire AD au-deſſus de ce Plan. Il n'eſt pas poſſible non plus d'abbaiſſer deux Perpendiculaires ſur un Plan, d'un même point D pris au-deſſus de ce Plan.

DÉM. 1°. Puiſque AD eſt Perpendiculaire ſur le Plan BM, elle fait donc des Angles droits avec toutes les Lignes du Plan, leſquelles paſſent par le point A (2) : ainſi toute Ligne AS, différente de AD, fera des Angles plus petits ou plus grands ; elle ne ſera donc pas Perpendiculaire.

2°. par la même raiſon, toute autre Ligne DO ne pourra pas être Perpendiculaire ſur le Plan BM ; car, ſi elle l'étoit, elle le ſeroit auſſi ſur AB, tirée par l'extrêmité O (2), & l'Angle AOD ſeroit droit ainſi que DAO ; par conſéquent les trois Angles du Triangle DAO vaudroient plus de deux Angles droits, ce qui eſt impoſſible. Il eſt donc auſſi impoſſible que la Ligne DO ſoit Perpendiculaire. C. Q. F. D.

4. PROPOS. III. La commune Section DA (fig. 3.) de deux Plans BM, CT, Perpendiculaires ſur un troiſiéme Plan OS, eſt auſſi Perpendiculaire ſur ce troiſiéme Plan.

DÉM. Élevons du point A une Perpendiculaire ſur le

Plan OS, elle ſe trouvera néceſſairement dans le Plan BM, ainſi que dans le Plan CT. Car, comme une Perpendiculaire ſur un Plan n'incline d'aucun côté, ſi elle ne ſe trouvoit pas en même-tems, dans les Plans BM, CT, il faudroit que ces Plans s'en écartaſſent, & qu'ainſi ils penchaſſent plus d'un côté que de l'autre ſur le Plan OS, ce qui eſt contre la ſuppoſition : la Perpendiculaire, élevée du Point A ſur le Plan OS, ſe trouve donc néceſſairement ſur les deux Plans BM, CT ; or cette Perpendiculaire étant unique (3), ne peut ſe trouver que dans l'étendue commune à ces Plans, c'eſt-à-dire, dans leur commune Section. Ainſi la commune Section DA n'eſt pas différente de la Perpendiculaire, que l'on élèveroit au Point A ſur le Plan OS ; cette commune Section eſt donc Perpendiculaire ſur ce Plan. C. Q. F. D.

5. DÉFINITIONS. Suppoſons que le Triangle HCF (fig. 4.) ſoit la coupe d'un Cône droit ou oblique par l'Axe de ce ſolide ; que d'un Point A quelconque d'un côté HC de ce Triangle, l'on tire ſur ſa ſurface la Ligne AB parallèlement à l'autre côté HF ; & que par cette Ligne AB l'on faſſe paſſer un Plan Perpendiculaire à celui du Triangle HCF ; ce Plan formera, dans la ſolidité du Cône, une nouvelle ſurface DMATS, à laquelle on a donné le nom de *Parabole* (*a*) ; la Ligne AB en eſt l'*Axe* ; le point A le *Sommet* ; toute Ligne MP ou DB, abbaiſſée d'un Point quelconque M ou D de ſon Périmètre perpendiculairement à ſon *Axe* s'appelle *Ordonnée* à cet Axe ; une partie quelconque de cet Axe compriſe entre le Sommet A & la rencontre d'une Ordonnée, eſt une *Abciſſe* ; ainſi les Lignes AP, AB ſont des *Abciſſes* ; quelquefois on les nomme *Coupées* ou Flèches *Sagittæ* (*b*).

6. PROPOS. IV. Les Quarrés des Ordonnées dans la Parabole, ſont entr'eux comme les *Abciſſes* correſpondantes, c'eſt-à-dire que $\overline{PM}^2 . \overline{BD}^2 :: AP . AB$.

(*a*) On en verra bien-tôt la raiſon.

(*b*) C'eſt par le rapport de toutes ces Lignes, les unes à l'égard des autres, que l'on parvient à déterminer les propriétés des Courbes, &c.

DÉM. Imaginons que, par un Point M quelconque du Périmètre de la *Parabole*, on faſſe paſſer un Plan, qui coupe la ſolidité du Cône parallèlement au Cercle de ſa baſe; ce Plan, dont la coupe eſt auſſi un Cercle (1), ſera Perpendiculaire au Plan du Triangle par l'Axe, à cauſe que la Baſe du Cône eſt ſuppoſée Perpendiculaire ſur le Plan de ce même Triangle; la Parabole DAS & le Cercle CDFS ſont donc Perpendiculaires ſur le même Plan HCF; par conſéquent leur commune Section DBS eſt auſſi Perpendiculaire ſur ce Plan (4); donc elle eſt Perpendiculaire au Diamétre CF & à l'Axe AB, qui paſſent par ſon extrêmité B (2); parce que ces Lignes ſont dans le Plan du Triangle par l'Axe; ainſi DB eſt une Ordonnée à l'Axe AB (5), & DB = BS (par la nature du Cercle). Et, ſi nous raiſonnons préciſément de même par rapport à la commune Section MPT de la Parabole & du Cercle OMGT, nous verrons que MPT eſt Perpendiculaire ſur le Diamétre OG, ainſi que ſur l'Axe AB; que par conſéquent MP eſt une autre Ordonnée à la Parabole, & que MP = PT.

Ceci bien entendu, conſidérons les Triangles ſemblables APO, ABC, nous aurons AP. AB :: PO. BC :: PO × PG. BC × BF; parce que PG = BF, à cauſe du paralléliſme des Lignes AB, HF (ſupp.), & de celui des Lignes PG, BF (conſt.); donc AP. AB :: PO × PG. BC × BF. Or $PO \times PG = \overline{PM}^2$, & $BC \times BF = \overline{BD}^2$ (par la nature du Cercle.) par conſéquent (en ſubſtituant ces dernières valeurs) nous aurons AP. AB :: $\overline{PM}^2$. $\overline{BD}^2$, ou $\overline{PM}^2$. $\overline{BD}^2$ :: AP. AB. C. Q. F. D.

* 7. Réciproquement, ſi la Section d'un Cône, faite perpendiculairement au Triangle HCF par l'Axe de ce ſolide (& non parallèlement ni antiparallèlement (*a*) à ſa Baſe circulaire), eſt telle que les quarrés des Ordonnées à l'Axe de la Section ſoient entr'eux comme les Abciſſes correſpondantes, cette coupe ſera une *Parabole*, c'eſt-à-dire, que ſi

(*a*) Voyez au n°. 4. de l'Ellipſe ce que c'eſt qu'une coupe *Antiparallèle*.

l'on a en ce cas, $\overline{PM}^2 . \overline{BD}^2 :: AP . AB$, l'Axe de la Section ſera parallèle au côté HF du Triangle HCF.

DÉM. Suppoſons que, quand on a fait cette coupe, tous les Cercles Perpendiculaires au Plan du Triangle par l'Axe du Cône ayent été décrits; il eſt évident que cette coupe a dû paſſer par le Plan de pluſieurs de ces Cercles, tels que OMGT, CDFS, & que par conſéquent les communes Sections PM, BD, qu'elle fait avec ces Plans, ſont Perpendiculaires ſur le Plan du Triangle HCF (4); ainſi PM, BD étant par-là Perpendiculaires à l'Axe AB de la coupe, & aux Diamétres OG, CF des Cercles (2), on voit que ces Lignes ſont, en même-tems, Ordonnées à l'Axe de la coupe & aux Diamétres des Cercles; donc $\overline{PM}^2 = OP \times PG$, & $\overline{BD}^2 = CB \times BF$; mais (ſupp.) $\overline{PM}^2 . \overline{BD}^2 :: AP . AB$; par conſéquent, (en ſubſtituant dans cette proportion la valeur de $\overline{PM}^2$ & celle de $\overline{BD}^2$) on aura $OP \times PG . CB \times BF :: AP . AB$. Or, (à cauſe des Triangles ſemblables APO, ABC,) $AP . AB :: OP . CB$; donc $OP \times PG . CB \times BF :: OP . CB$.; ainſi $OP \times PG \times CB = CB \times BF \times OP$; donc (en diviſant par $OP \times CB$) on aura $PG = BF$. Par conſéquent, puiſque les Cercles, OMG, CDF ſont parallèles (conſt.), leurs communes Sections OG, CF, faites par le Plan HCF, ſont auſſi Paralléles (*369 Inſt. T.* 2.); ainſi les Lignes AB, HF, qui paſſent par les extrêmités des Parallèles égales PG, BF, ſur le même Plan, ſont auſſi Parallèles, & par conſéquent la Section conique propoſée eſt une *Parabole* (5) [*a*].

[*a*] Quand on parle d'un *Triangle par l'Axe* d'un Cône, il ne faut pas ſe perſuader que ce que l'on en dit, ſoit tellement particulier à ce Triangle déterminé, qu'il ne puiſſe pas convenir à une infinité d'autres Triangles par l'Axe de ce même Cône. Puiſque le Triangle générateur de ce ſolide, paſſant toujours par ſon Axe, eſt répété autant de fois qu'il y a de Points dans la circonférence de la Baſe du Cône.

Cependant un Triangle par l'Axe étant une fois déterminé; la Section du Cône, qui ſe fait perpendiculairement à ſon Plan, ne convient qu'à lui; c'eſt-à-dire, en reſtreignant la fig. 4. que de tous les Triangles poſſibles par l'Axe du Cône, ſi l'on s'eſt déterminé au Triangle HCF, il eſt le ſeul ſur lequel puiſſe tomber perpen-

8. REMARQ.

8. REMARQ. Le Triangle HCF, Section du Cône par l'Axe, fait voir que le circuit d'une Section conique n'eſt pas toujours une Courbe : on ne peut donc pas avancer, ſans démonſtration, que le Périmètre de la *Parabole* en ſoit une.

9. COROLAIRE I. Une portion quelconque AMD, du Périmètre de la Parabole eſt une Ligne courbe. Car, ſi la Ligne AMD étoit droite, on auroit PM. BD :: AP. AB; mais (6) PM. BD :: AP. AB. donc PM. BD :: PM. BD; ainſi PM × BD × BD = PM² × BD [a]. Donc (en diviſant par PM × BD) on auroit BD = PM, & par conſéquent AB = AP; ce qui eſt abſurde. La Ligne AMD ne ſçauroit donc être une droite; ainſi il eſt néceſſaire que ce ſoit une courbe.

Puiſque la Parabole, ſon Axe & ſes Ordonnées ſe trouvent dans un même Plan, nous pouvons conſidérer cette Courbe, indépendamment du Cône, où elle a pris naiſſance; la tranſporter ſur une ſurface plâne & rechercher les autres propriétés qui la caractériſent; de manière que toutes les Lignes tirées à ce deſſein, ſeront toujours ſuppoſées dans le Plan de la Parabole.

10. COROL. II. La Parabole s'éloigne donc de ſon Axe

---

diculairement la commune Section DBS; étant évident qu'une Ligne perpendiculaire à l'un de deux ou pluſieurs Plans qui ſe coupent, ne peut pas être en même-tems perpendiculaire à tous les autres.

Ce n'eſt pas qu'il ne puiſſe naître une *Section conique* de la coupe d'un Plan, qui ne ſeroit pas perpendiculaire au *Triangle par l'Axe* que l'on auroit choiſi; parce que, ſi ce Plan coupant n'eſt pas perpendiculaire à un certain *Triangle par l'Axe*, il le ſera néceſſairement à quelqu'autre : ainſi la raiſon pour laquelle on ſe détermine à faire couper le Cône, par un Plan perpendiculaire à celui du *Triangle par l'Axe*, auquel on s'eſt arrêté, eſt que cette manière de le couper eſt plus propre que toute autre aux démonſtrations dont on a beſoin; & que d'ailleurs, ſans cette condition, les communes Sections telles que DBS, MPT, ne ſeroient pas coupées en deux parties égales, par les Diamétres CF, OG; cela ne pouvant arriver que dans le cas, où DBS & MPT ſont perpendiculaires à ces Diamétres; or la perpendicularité de ces Lignes dépend de celle du Plan coupant au *Triangle par l'Axe*, ainſi qu'il eſt évident.

[a] J'avertis une fois pour toutes que, quand je conclurai une égalité d'une proportion, c'eſt que j'aurai fait le produit des Extrêmes & celui des Moyens.

de plus en plus ; car $\overline{PM}^2 . \overline{BD}^2 :: AP . AB$. Or AB étant plus grande que AP, il faut que $\overline{BD}^2$ ſoit auſſi plus grand que $\overline{PM}^2$; & par conſéquent, que l'Ordonnée BD ſoit plus grande que l'Ordonnée PM. Ainſi plus l'Axe s'allonge, plus les Ordonnées croiſſent ; c'eſt-à-dire que leurs extrêmités ſont plus éloignées de l'Axe ; or ces extrêmités ſont à la Parabole ; par conſéquent la Parabole s'éloigne de plus en plus de ſon Axe.

11. COROL. III. D'où il ſuit qu'en tirant une parallèle quelconque OV (fig. 5.) à l'Axe de la Parabole, cette parallèle rencontrera néceſſairement la Courbe en un ſeul Point M, & entrera ou ſera déterminée à entrer dans l'eſpace parabolique : car une parallèle à l'Axe eſt toujours à égale diſtance de cet Axe ; mais nous venons de voir que la Parabole s'en écarte toujours de plus en plus ; elle paſſera donc au-delà de cette parallèle, & ne pourra avoir qu'un Point de commun avec elle.

12. COROL. IV. Si l'on joint les Points D, M, par une corde, elle ira néceſſairement rencontrer l'Axe en quelque Point T ; puiſque, ſi elle étoit parallèle à l'Axe, elle ne pourroit couper la Courbe qu'en un ſeul point (11) ; or elle la coupe en deux Points (ſupp.) ; elle n'eſt donc pas parallèle à l'Axe : ainſi elle eſt déterminée à le rencontrer en quelque Point T.

13. COROL. V. Une Tangente à la Parabole, ira auſſi néceſſairement rencontrer l'Axe de cette Courbe. Car elle ſera déterminée à rencontrer cet Axe, ou elle lui ſera parallèle ; or, ſi elle lui étoit parallèle, elle entreroit dans l'eſpace parabolique (11) ; ce qui eſt impoſſible, puiſqu'on la ſuppoſe Tangente. Par conſéquent une Tangente à la Parabole va néceſſairement rencontrer l'Axe de cette Courbe.

14. COROL. VI. Deux Tangentes quelconques, TRG, CHL, à la même branche d'une Parabole, ſe coupent néceſſairement, ou ſont déterminées à ſe couper en quelque Point I : Puiſque, ſi l'une des Tangentes CHL étoit paral-

lèle à l'autre, comme elle a un de ſes Points H au-deſſous de l'autre Tangente TRG, par rapport à l'Axe, il faudroit néceſſairement que tous ſes autres Points, fuſſent auſſi au-deſſous de cette Tangente, & par conſéquent qu'elle entrât dans l'eſpace parabolique; ce qui n'eſt pas poſſible, vû qu'on la ſuppoſe Tangente: or, CHL n'étant pas parallèle à TRG, coupe néceſſairement, ou eſt déterminée à couper cette dernière en quelque Point I.

15. COROL. VII. Par conſéquent, en tirant d'un Point quelconque K de la Parabole, une parallèle KS à une Tangente quelconque TRG à cette Courbe, cette paralléle coupera néceſſairement la Courbe en un autre Point Q. Car, ſi l'on menoit par un Point quelconque H, au-deſſous de R, une autre Tangente CHL, elle couperoit néceſſairement la première en quelque Point I (14); donc elle couperoit auſſi ſa parallèle KS; mais elle ne pourroit la couper qu'au-dehors de la Courbe; il faudroit donc que cette parallèle ſortît au-dehors, & par conſéquent qu'elle coupât une ſeconde fois la Parabole.

16. DÉFIN. Cherchez une troiſiéme proportionelle à une Abciſſe AP quelconque & à ſon Ordonnée correſpondante PM; c'eſt-à-dire faites AP. PM :: PM eſt à une quatriéme Ligne, ou AB. BD :: BD eſt à un quatriéme terme, & la Ligne que vous trouverez de cette manière, eſt ce que les anciens Géomètres appelloient *Latus rectum*, & ce que les modernes nomment *Paramètre*; nous la déſignerons dans la ſuite par la lettre p, à cauſe que cette quatriéme proportionelle eſt une *Conſtante*; c'eſt-à-dire que l'on en trouve toujours la même valeur, de quelque Abciſſe que l'on ſe ſerve; ainſi qu'on va le faire voir.

17. COROL. VIII. Si l'on fait donc AP. PM :: PM. p, & AB. BD :: BD. m. (en quelqu'endroit de l'Axe que tombent les Points P, B.) Je dis qu'on trouvera toujours $p = m$. Car alors $\overline{PM}^2 = AP \times p$ & $\overline{BD}^2 = AB \times m$; ainſi $\overline{PM}^2$. $\overline{BD}^2$ :: $AP \times p$. $AB \times m$. Mais (6) $\overline{PM}^2$. $\overline{BD}^2$ :: AP. AB. donc $AP \times p$. $AB \times m$ :: AP. AB. ainſi $AP \times AB \times p = AP \times AB$

$\times m$; & par conſéquent (en diviſant par AP $\times$ AB) on trouve $p = m$ [a].

* 18. *Autre manière de trouver le Paramètre.* Cela eſt fort aiſé, quand la Parabole & ſon Axe AB ſont donnés, en tirant du Sommet A une corde quelconque AN, (fig. 19.) ſur laquelle on élèvera, au Point N, la Perpendiculaire NB, qui coupera l'Axe en quelque Point B; car, après cela, ſi du Point N on tire l'Ordonnée NF, la Ligne FB ſera le Paramètre (16); puiſque AF. NF :: NF. FB (291 *Inſt. T.* 2.).

* 19. *Troiſiéme manière.* Tirez au Sommet de l'Axe, une corde qui faſſe avec lui un Angle demi-droit ou de 45 degrés; & du Point M où cette corde coupe la Courbe, abbaiſſez une Perpendiculaire ou une Ordonnée PM à l'Axe; alors cette Ordonnée ou ſon Abciſſe correſpondante ſera égale au Paramètre. Car AP égalant PM (conſt.) on aura $\overline{AP}^2 \times AP = \overline{PM}^2 \times PM = \overline{AP}^2 \times p$ (16). Donc $p = AP = PM$.

20. COROL. IX. Puiſque le *Paramètre* p eſt une grandeur *conſtante*, & qu'il eſt toujours une troiſiéme proportionnelle à une Abciſſe quelconque & à ſon Ordonnée correſpondante; il eſt clair que *le quarré d'une Ordonnée quelconque à la Parabole, eſt toujours égal au Rectangle du Paramètre par l'Abciſſe correſpondante.* En effet, ſi l'on reprend les proportions AP. PM :: PM. p & AB. BD :: BD. m, du n°. 17 (fig. 5) & que l'on mette p au lieu de m (17.), on aura toujours $\overline{PM}^2 = AP \times p$ & $\overline{BD}^2 = AB \times p$, & ainſi des autres Ordonnées. En faiſant donc une Ordonnée quelconque PM $= y$, & ſon Abciſſe correſpondante AP $= x$, l'on aura $yy = px$; équation qui caractériſe la *Parabole*; & d'où cette Courbe a tiré ſon nom; car le mot Grec *Paraballein*

[a] Comme cette troiſiéme proportionelle à une Abciſſe quelconque & à ſon Ordonnée correſpondante, ſe trouve toujours la même, c'eſt ce qui lui a fait donner le nom de *Paramètre*: parce que cette Ligne eſt une eſpèce de *Module*, qui détermine les *Dimenſions* de la Parabole, en quelque Point qu'on la prenne: ſans cette Ligne, qui ſe trouve déterminée par la nature de la Section, il ſeroit difficile de conſtruire cette Courbe indépendamment du Cône; &, au moins, l'on ne pourroit pas en fixer les Dimenſions; puiſque les Abciſſes & les Ordonnées en ſont indéterminées.

ſignifie *égaler*. Par conſéquent, ſi dans la réſolution d'un Problême, il arrive que le quarré d'une Ordonnée ou d'une Perpendiculaire quelconque PM à une Ligne AB, dont l'origine A eſt fixe, ſoit égal au Rectangle de l'Abciſſe AP par une conſtante p, on pourra aſſurer que les extrêmités M de toutes ces Ordonnées ſe trouveront dans une Parabole; & qu'ainſi, pour avoir la ſolution entière du Problême, il faudra conſtruire cette Courbe.

Car, faiſant une autre Ordonnée BD $= z$, & ſon Abciſſe correſpondante AB $= u$, on aura (ſupp.) $yy = px$, & $zz = pu$; donc $yy . zz :: px . pu :: x . u$ (en diviſant par p); c'eſt-à-dire que les quarrés yy, zz des Ordonnées ſont entr'eux comme les Abciſſes x, u, correſpondantes. Or, quand cela arrive, la Ligne qui paſſe par les extrêmités de ces Ordonnées eſt une *Parabole* (7). L'équation $yy = px$, ou $zz = pu$ exprime donc une Parabole; & l'Ordonnée y ou PM $= \sqrt{px}$.

* 21. Corol. X. D'un Point quelconque H d'une Parabole (fig. 6.), différent du Sommet A, abbaiſſez une Perpendiculaire HD ſur la double Ordonnée MC à l'Axe AP de cette Courbe, & vous aurez toujours $MD \times DC = HD \times p$.

Démonst. $MD \times DC = \overline{MP + PD} \times \overline{PC - PD} = \overline{MP + PD} \times \overline{MP - PD}$ (parce que MP $=$ PC) $= \overline{MP}^2 - \overline{PD}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2$ (à cauſe de HG $=$ PD); donc $MD \times DC = \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2$. Or, $\overline{MP}^2 = AP \times p$, & $\overline{HG}^2 = AG \times p$ (20); donc $\overline{MP}^2 - \overline{HG}^2 = AP \times p - AG \times p = \overline{AP - AG} \times p = GP \times p = HD \times p$. Ainſi $\overline{MP}^2 - \overline{HG}^2 = HD \times p$. Par conſéquent, puiſque $MD \times DC = \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2$, ainſi qu'on l'a vû; il eſt clair que $MD \times DC = HD \times p$. C. Q. F. D.

* 22. Corol. XI. D'où il ſuit que $\overline{MP}^2 . MD \times DC :: AP$,

HD. Car $\overline{MP}^2 = AP \times p$ (20) & $MD \times DC = HD \times p$ (21). Donc $\overline{MP}^2 . MD \times DC :: AP \times p . HD \times p :: AP . HD$, (en divisant par p). Ainsi $\overline{MP}^2 . MD \times DC :: AP . HD$.

* 23. Réciproquement, si une Ligne quelconque MC, divisée en deux parties égales par une Perpendiculaire AP, est telle qu'étant divisée en un autre Point quelconque D par une Perpendiculaire HD l'on ait toujours $\overline{MP}^2 . MD \times DC :: AP . HD$; je dis que les Points M, A, H, C, seront à une Parabole, dont AP est l'Axe.

DÉM. Nous sçavons déja que $MD \times DC = \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2$ (Dém. du n°. 21.), & $HD = AP - AG$. Or (supp.) $\overline{MP}^2 . MD \times DC :: AP . HD$. Donc $\overline{MP}^2 . \overline{MP}^2 - \overline{HG}^2 :: AP . AP - AG$; donc (en soustrayant) $\overline{HG}^2 . \overline{MP}^2 :: AG . AP$. Les quarrés des Ordonnées HG, MP, sont donc entr'eux comme les Abcisses correspondantes AG, AP. Par conséquent, les Points M, A, H, sont à la Parabole dont l'Axe est AP (7); d'ailleurs PC étant = PM (supp.), le Point C est aussi à la même Parabole. C. Q. F. D.

Ce Corollaire & sa converse sont utiles dans la doctrine du jet des bombes.

24. PROBLÊME. La Ligne BD (fig. 5.) étant donnée pour le *Paramètre* d'une *Parabole*, construire cette Courbe.

RÉSOLUTION. Prenez une Ligne quelconque indéfinie AB, dont vous déterminerez l'origine au Point A, & le regardant comme l'Axe de la Courbe à construire, divisez cette Ligne en autant de parties égales ou inégales que vous le voudrez, mais cependant les plus petites qu'il vous sera possible; aux Points de division P, E, élevez des Perpendiculaires PM, EN, (on n'en tire ici que deux pour éviter la confusion des Lignes), dont chacune soit moyenne proportionnelle entre son Abcisse correspondante & le Paramètre donné BD; enfin, faites passer une Courbe par les

extrêmités M, N, de ces Perpendiculaires, ce ſera la Parabole qu'on demande.

DÉM. Par la conſt. AP. PM :: PM. BD, donc $AP \times BD = \overline{PM}^2$: de même AE. EN :: EN. BD : donc $AE \times BD = \overline{EN}^2$, & ainſi à tous les autres Points; on a donc, en quelque Point que ce ſoit, le quarré de l'Ordonnée PM égal au Rectangle de l'Abciſſe AP correſpondante par le Paramètre BD; & par conſéquent l'on a (20) la Parabole cherchée.

25. *Autre manière.* Soit la Ligne indéfinie AL (fig. 7.) dont la partie AC = le Paramètre donné. Au Point C élevons la Perpendiculaire indéfinie *ds*. Après quoi d'un Point quelconque D pris ſur AL, & d'un Rayon DA > BA moitié de AC, décrivons le Cercle H*m*A. Opérons de même aux Points F, G, C, &c. avec les Rayons FA, GA, CA, &c. nous aurons des Cercles qui couperont l'indéfinie *ds* aux Points *m*, *o*, *p*, *r*, &c. Enfin avec les deux Lignes C*m*, CH, achevons le Rectangle C*s*, pour avoir le Point *t* qui ſera à la Parabole cherchée. Opérant de même avec les deux Lignes CO, CI; ainſi qu'avec C*p*, CK; ou encore C*r*, CL, &c. nous trouverons de cette manière autant de Points *u*, *x*, *y*, &c. leſquels ſeront à la même Parabole.

DÉM. Soit le Paramètre AC = *p*. par la nature du Cercle CH. C*m* :: C*m*. AC ou *p*. donc $\overline{Cm}^2 = CH \times p$. Or $\overline{Cm}^2 = \overline{Ht}^2$. Ainſi $\overline{Ht}^2 = CH \times p$; donc (20) le Point *t* eſt à une Parabole, dont le Paramètre = AC. Et l'on ſe conduira de même pour démontrer, que les autres Points *u*, *x*, *y*, &c. ſont à cette Parabole. C. Q. F. T. & D.

26. *Je me ſuis beaucoup étendu ſur les premières idées, qui nous ont fait découvrir les propriétés fondamentales ou caractériſtiques de la Parabole, & nous ont conduit à ſa conſtruction; mais, comme ce ſera une marche ſemblable pour les autres Sections coniques, ceci eſt démontré une fois pour toutes. Ainſi les Commençans, qui voudront prendre bien l'eſprit de la Géométrie, c'eſt-à-dire, la manière dont on procède pour y faire des découvertes, doivent inſiſter courageuſement ſur ces premiers Élémens,*

& être très-perſuadés que ſçavoir bien c'eſt ſçavoir beaucoup.

27. PROB. Une Parabole DAH (fig. 5.) étant donnée avec ſon Sommet A, trouver ſon Axe, ſon Paramètre, l'Ordonnée & la double Ordonnée égales au Paramètre.

RÉSOL. 1°. Du Point A, d'une ouverture de compas quelconque AM, décrivez un Cercle qui coupe la Parabole en deux Points M, R; & tirant la corde MR, menez du Point A la Ligne indéfinie AB par ſon milieu P; il eſt clair que PM = PR ſera Perpendiculaire ſur AB; & que par conſéquent (5) AB ſera l'*Axe* & PM ou PR une *Ordonnée*.

2°. Faites AP. PM :: PM eſt à une quatriéme Ligne, & vous aurez le Paramètre p. (16).

3°. Prenez l'Abciſſe AP égale au Paramètre trouvé p, & tirez l'Ordonnée PM, elle ſera égale au Paramètre. Car, puiſque $\overline{PM}^2 = AP \times p$ (20) $= pp$ (ſupp.), vous aurez $PM = p$.

4°. Faites $AP = \frac{p}{4}$ & tirez l'Ordonnée MP, que vous prolongerez juſqu'à la rencontre R de l'autre branche de la Parabole, & vous aurez $MR = p$. Car $\overline{PM}^2 = AP \times p$ (20) $= \frac{p}{4} \times p$ (ſupp.) $= \frac{pp}{4}$. Donc $PM = \frac{p}{2}$. Donc 2 PM ou $MR = p$.

28. DÉF. Nous avois déja vû (13) qu'une Tangente NT (fig. 8.) à la Parabole rencontroit néceſſairement l'Axe de cette Courbe; ainſi, en tirant du Point de contingence N une Ordonnée NE à l'Axe, la Tangente NT, l'Ordonnée NE & la portion de l'Axe TE, que l'on nomme alors *ſous-Tangente*, formeront un Triangle-Rectangle TEN. Mais on ſçait que deux côtez quelconques d'un Triangle-Rectangle étant déterminés, le troiſiéme l'eſt néceſſairement: par conſéquent, ſi on propoſoit de trouver une méthode de mener une Tangente en un Point N quelconque d'une Parabole ou d'une Courbe, dont on connût le rapport des Abciſſes aux Ordonnées de l'Axe, on voit qu'après avoir mené du Point donné N l'Ordonnée NE à l'Axe, il ne s'agit que de déterminer la ſous-Tangente TE, c'eſt-à-dire, de trouver le rapport qu'elle a avec l'Abciſſe AE ou quel-

qu'autre Ligne connue. Or, voici la méthode générale dont je me ſers pour cela, & qu'aucun Auteur n'a donnée, au moins que je ſçache; elle eſt fort ſimple : mais l'exemple ſuivant la fera encore mieux entendre que le raiſonnement pur.

29. PROP. V. Dans la Parabole, la ſous-Tangente TE eſt toujours double de l'Abciſſe AE.

DÉM. Que l'on ſe repréſente d'abord la Sécante TMD (fig. 5.) qui paſſe au Point M, où l'on voudroit avoir une Tangente. En ce cas, ſi l'on faiſoit tourner la Ligne TMD ſur le Point T vers la gauche, juſqu'à ce qu'elle ceſsât de couper la Courbe; il eſt clair que les Points D, M, d'interſection, ſe rapprochans toujours l'un de l'autre, ſe confondroient enfin, lorſque TMD deviendroit Tangente, & qu'alors PT ſeroit la *ſous-Tangente*. Faiſons préſentement AP $=$ x. PB $=$ d. Ainſi AB $=$ $x+d$. PT $=$ s, & $\overline{PT}^2$ $=$ ss, donc BT $=$ $s+d$, & $\overline{BT}^2$ $=$ $ss+2ds+dd$.

Ceci ſuppoſé, nous avons (6) BD. PM :: AB ($x+d$). AP (x), & (à cauſe des Triangles ſemblables TBD, TPM) $\overline{BD}^2$. $\overline{PM}^2$ :: $\overline{BT}^2$ ($ss+2ds+dd$). $\overline{PT}^2$ (ss). Par conſéquent $x+d.x::ss+2ds+dd.ss$. Donc, (en ſouſtrayant) $d.x::2ds+dd.ss$. Ainſi $dss=2dsx+ddx$. Donc, (en diviſant par d) $ss=2sx+dx$ (A), ou $2s+d.s::s.x$; ainſi le rapport de s à x, c'eſt-à-dire de la ſous-Tangente à l'Abciſſe, vaut celui de $2s+d$ à la quantité s, en ſuppoſant que TMD ſoit Sécante. Mais, dans l'inſtant que TMD devient Tangente, les Points D, M ſe confondent, & la différence PB $=$ d des Abciſſes devient $=0$; Effaçant donc, dans l'équation A, le terme où d ſe trouve, cette équation devient $ss=2sx$, ou (en diviſant par s) $s=2x$. Ce qui ſignifie que *la ſous-Tangente* PT *eſt double de l'Abciſſe correſpondante* AP. Et, comme cela arrive, en quelque Point que ce ſoit de la Courbe, on voit que, ſi l'on ſuppoſe TN Tangente (fig. 8.), on aura la ſous-Tangente TE double de l'Abciſſe AE. C. Q. F. D.

30. Réciproquement, ſi après avoir tiré du Point N de la Parabole une Ordonnée NE à ſon Axe, l'on fait AT = AE, pour avoir TE double de l'Abciſſe AE, je dis que TN, menée du Point T à l'extrêmité N de l'Ordonnée NE, ſera Tangente à la Parabole.

DÉM. Elle ſera Tangente ou Sécante; or il eſt impoſſible qu'elle ſoit Sécante; car, ſi elle l'étoit, on pourroit donc du Point N tirer une Tangente NS, qui iroit rencontrer l'Axe (13) en un Point *s* au-deſſus ou au-deſſous de T; mais, quand NS eſt Tangente, nous venons de voir que la ſous-Tangente ES eſt double de l'Abciſſe AE; ainſi l'on auroit ES = 2 AE: or (ſupp.) TE = 2 AE. Donc ES = TE, c'eſt-à-dire, la partie égale au tout, ce qui eſt abſurde. Il eſt donc impoſſible que TN ſoit Sécante; c'eſt par conſéquent une Tangente.

31. COROL. I. D'où il ſuit, qu'en élevant au Point N de contingence, la Perpendiculaire NL à la Tangente NT, cette Perpendiculaire rencontrera l'Axe en un Point L, tel que la *ſous-Perpendiculaire* ou *ſous-Normale* EL ſera égale à la moitié du Paramètre; il faut donc prouver que EL = $\frac{p}{2}$.

DÉM. Suppoſant NE = *y*. AE = *x*. TE = 2*x* (29); nous aurons 2*x* (TE). *y* (NE) :: *y* (NE). EL (parce que le Triangle TNL eſt Rectangle en N, & que NE eſt Perpendiculaire ſur TL (conſt.); donc EL = $\frac{yy}{2x}$. Or *yy* = *px* (20); par conſéquent EL = $\frac{px}{2x}$ = $\frac{p}{2}$.

* 32. COROL. II. D'un Point quelconque de la Parabole, tirez une double Ordonnée MPQ à l'Axe AO de cette Courbe (fig. 9.), une Tangente MG, & une Perpendiculaire QG au Point Q. Si l'on mène, après cela, une Ligne quelconque MT ou M*t*, juſqu'à ce qu'elle coupe la Courbe en quelque Point T ou *t*, au-deſſus ou au-deſſous de MQ, & qu'elle rencontre QG au Point R ou *r*; qu'enſuite du Point T ou *t*, l'on abbaiſſe la Perpendiculaire TS ou *ts* ſur MQ, prolongée s'il eſt néceſſaire; je dis que, ſi la Ligne MT tombe au-deſſus ou au-deſſous de MQ, & qu'on joigne les Points S, R, ou *s*, *r*, par la droite SR

ma rr, cette Ligne SR ou rr ſera néceſſairement parallèle à la Tangente MG.

Dém. Du premier cas, il faut démontrer que MQ. QG :: QS. QR. Soit AP $= x$; PL $= 2x$ (29); le Paramètre $= p$; PQ $=$ MP $= \sqrt{px}$ (20); MQ $= 2\sqrt{px}$; QG $= 4x$, (car MQ $= 2$ MP; donc QG $= 2$ PL $= 4x$.) PS $= d$; MS $=$ MP $+$ PS $= \sqrt{px} + d$; QS $=$ PQ $-$ PS $= \sqrt{px} - d$; tirant l'Ordonnée TO $=$ PS $= d$, l'on aura AO $\times p =$ TO$^2 = dd$ (20), donc AO $= \frac{dd}{p}$; ainſi PO $=$ AP $-$ AO $= x - \frac{dd}{p} =$ ST. Mais MS. ST :: MQ. QR; c'eſt-à-dire (en mettant les valeurs analytiques de MS, ST, MQ) $\sqrt{px} + d. x - \frac{dd}{p} :: 2\sqrt{px}.$ QR $= \frac{x - \frac{dd}{p} \times 2\sqrt{px}}{\sqrt{px} + d}$. Voici donc les valeurs analytiques $2\sqrt{px}$, $4x$, $\sqrt{px} - d$, $\frac{x - \frac{dd}{p} \times 2\sqrt{px}}{\sqrt{px} + d}$ des quatre grandeurs MQ, QG, QS, QR : or je dis que $2\sqrt{px}$. $4x :: \sqrt{px} - d. \frac{x - \frac{dd}{p} \times 2\sqrt{px}}{\sqrt{px} + d}$, ou (en multipliant les deux derniers termes par $\sqrt{px} + d$) :: $px - dd. x - \frac{dd}{p} \times 2\sqrt{px}$. Ce qui eſt inconteſtable; puiſque le produit des extrêmes $2\sqrt{px} \times x - \frac{dd}{p} \times 2\sqrt{px} = 4x \times px - dd$ produit des moyens; car on a de part & d'autre $4pxx - 4ddx$. Donc MQ. QG :: QS. QR, & par conſéquent SR eſt parallèle à MG. C. Q. F. D.

Dém. Du ſecond cas. Si rs eſt parallèle à MG, les Trian-

gles sQr, MQG ſeront ſemblables; il faut donc prouver que MQ. QG :: Qs. Qr.

Soit, comme ci-deſſus, Ps = d; donc Qs = Ps — PQ = $d - \sqrt{px}$; & tirant l'Ordonnée to = Ps = d, on aura Ao = $\frac{dd}{p}$. Donc Po = Ao — AP = $\frac{dd}{p} - x$ = st. Or Ms. st :: MQ. Qr. ou $\sqrt{px} + d . \frac{dd}{p} - x$ :: $2\sqrt{px} . \frac{\overline{\frac{dd}{p} - x} \times 2\sqrt{px}}{\sqrt{px} + d}$ = Qr. Ainſi il s'agit de démontrer que $2\sqrt{px} . 4x :: d - \sqrt{px} . \frac{\overline{\frac{dd}{p} - x} \times 2\sqrt{px}}{\sqrt{px} + d}$ ou (en multipliant les deux derniers termes par $\sqrt{px} + d$) :: $dd - px . \frac{dd}{p} - x \times 2\sqrt{px}$. Or cela eſt certain, puiſque $2\sqrt{px} \times \overline{\frac{dd}{p} - x} \times 2\sqrt{px} = 4x \times \overline{dd - px}$. Donc MQ. QG :: Q$s$. Q$r$. Par conſéquent rs eſt parallèle à MG. C. Q. F. D.

* 33. Réciproquement, après avoir tiré MR ou Mr au-deſſus ou au-deſſous de l'Horiſontale MQ, juſqu'à la rencontre R ou r de la Perpendiculaire GQr à MQ; ſi l'on mène Rs ou rs parallèle à la Tangente MG, & qu'aux Points S, s, où ces Lignes coupent la double Ordonnée MQ, on élève les Perpendiculaires ST, st, elles couperont néceſſairement la Courbe aux mêmes Points T, t, où elle eſt rencontrée par les obliques MR, Mr, prolongées ſuivant le beſoin.

Dém. Si les Perpendiculaires ST, st, ne coupoient pas la Courbe aux Points T, t; elles la couperoient en d'autres Points; ainſi des Points T, t, abbaiſſant des Perpendiculaires ſur MQs, elles tomberoient en des Points différens de S, s; donc, en menant de ces nouveaux Points des Lignes en R, r, ces dernières Lignes ſeroient parallèles à MG, comme l'on a vû ci-deſſus; mais (ſupp.) Rs ou rs eſt

auſſi parallèle à MG. Donc du même Point R ou *r*, il y auroit deux parallèles à la même Ligne ; ce qui eſt abſurde. On fera uſage dans le *jet des bombes* des n°. 32. & 33.

34. PROPOS. VI. Soit, comme ci-deſſus, la Tangente TM (fig. 10.), l'Ordonnée PM ; & que du Point M de contingence, l'on tire parallèlement à l'Axe une Ligne ME ; ſi par le Point A l'on mène une Perpendiculaire AG à l'Axe, juſqu'à ce qu'elle rencontre la Ligne ME, prolongée du côté de G, on aura le Triangle TOA = OMG.

DÉM. Car les Triangles TOA, OMG étant évidemment ſemblables ou équiangles, on a AT. MG :: AO. OG. Or AT = AP (29) & AP = MG (conſt.) donc AT = MG ; par conſéquent AO = OG. Donc le Triangle TOA = OMG.

35. PROPOS. VII. Le Triangle TMP = le Rectangle APMG ; &, en tirant AQ parallèlement à TM, on trouvera le Triangle AQG = le Parallèlogramme AQMT.

DÉM. 1°. Puiſque le Triangle TOA = OMG (34) on aura TOA + AOMP = OMG + AOMP ; c'eſt-à-dire, le Triangle TMP = le Rectangle APMG.

2°. Le Triangle AQG = le parallèlograme AQMT. Car ces deux figures ont la partie commune QMOA, & les deux autres parties TOA, OMG, qui les complètent reſpectivement, ſont égales (34) donc, &c.

36. PROPOS. VIII. Par un Point quelconque *x* de l'Axe, entre A & P, menons *xe* parallèlement à la Tangente AG ; & par le Point *u*, où elle coupe la Courbe, ſoit tirée S*u*K parallèlement à la Tangente TM ; alors le Triangle S*xu* = le Rectangle A*x*e*G*.

DÉM. Il eſt évident que les Triangles TPM, *sxu*, ſont ſemblables ; ainſi TPM. *sxu* :: PM. *xu* (306. *Inſt. T.* 2.) ; or (6) PM. *xu* :: AP. A*x* ; par conſéquent TPM. *sxu* :: AP. A*x* :: AP × PM. A*x* × *xe*. (parce que PM = *xe*) ; donc TPM. *sxu* :: AP × PM. A*x* × *xe*, ou, (en alternant) TPM. AP × PM :: *sxu*. A*x* × *xe* : mais TPM = AP × PM (35) ; donc le Triangle *sxu* = le Rectangle A*x* × *xe*. C. Q. F. D.

37. PROPOS. IX. Le Triangle SAI = le Trapèſe I*ue*G = *udoi* + *de*GO.

DÉM. Le Triangle *sxu* = le Rectangle A*xe*G (*36*); par conſéquent, en ôtant de part & d'autre la partie commune A*xu*I, on aura le Triangle SAI = le Trapèſe I*ue*G = *ud*OI + *de*GO. C. Q. F. D.

38. PROPOS. X. Si l'on prolonge la parallèle *Sr*, juſqu'à ce qu'elle rencontre la Courbe en un autre Point K (15); & que du Point K l'on tire l'Ordonnée KDB à l'Axe, il en naîtra un nouveau Triangle *r*DK égal au Triangle *reu*.

DÉM. Comme les Triangles *sxu*, SBK, ſont ſemblables, l'on aura *sxu*. SBK :: *xu*. BK (*306. Inſt. T.* 2.); or *xu*. BK :: A*x*. AB (*6*) :: A*x* × *xe*. AB × BD (à cauſe que *xe* = BD); par conſéquent le Triangle *sxu* eſt au Triangle SBK comme le parallélogramme A*xe*G eſt au Rectangle ABDG, ou, en alternant, *sxu*. A*xe*G :: SBK. ABDG. Mais *sxu* = A*xe*G (*36*); donc SBK = ABDG. Or ces deux dernières ſurfaces ont la partie commune BD*r*IA; par conſéquent la ſomme des autres parties, qui ne ſont pas communes, d'une part, eſt égale à la ſomme des autres parties de l'autre part, c'eſt-à-dire que SAI + *r*DK = *reu* + I*ue*G; mais (*37*) SAI = I*ue*G; donc enfin *r*DK = *reu*. C. Q. F. D.

39. COROL. I. Puiſque le Triangle *r*DK = le Triangle *reu*, & que d'ailleurs ces Triangles ſont évidemment ſemblables, il s'enſuit que *ur* = *r*K [*a*]; c'eſt-à-dire que la corde *u*K, parallèle à la Tangente TM, eſt coupée en deux parties égales par la Ligne ME, tirée du Point de contingence M parallèlement à l'Axe. Et, comme *ur* a été priſe à volonté, il eſt évident que toutes les parallèles à une Tangente quelconque de la *Parabole*, menées par un Point

[*a*] Je dis que, deux Triangles ſemblables, *r*DK, *reu*, égaux en ſurface, ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun. Car, ces Triangles étant ſemblables, DK. *eu* :: *r*D. *re*; &, comme on en ſuppoſe les ſurfaces égales, *r*D × DK = *re* × *eu*, ou *r*D. *re* :: *eu*. DK; donc DK. *eu* :: *eu*. DK; ainſi DK = *eu*, ou DK = *eu*; par conſéquent *r*D = *re*, & *r*K = *ur*.

de cette Courbe, & prolongées juſqu'à ce qu'elles rencontrent la Parabole en un autre Point K (15), ſeront coupées en deux parties égales par une Ligne, tirée comme ME; & c'eſt la raiſon pourquoi la Ligne ME, ou toute autre Ligne ſemblable, tirée parallèlement à l'Axe, a été nommée *Diamètre*; & les Lignes *tr* ou *r*K, tirées par un Point quelconque *r* du Diamètre parallèlement à la Tangente TM au Sommet, ſont nommées *Ordonnées*.

40. COROL. II. Toute corde Az (fig. 10. & 11.) menée par un Point *y* d'un Diamètre NH, au-deſſous du Sommet N, ſans être parallèle à la Tangente à ce Sommet, ne ſçauroit être coupée en deux parties égales par ce Diamètre. Car, ſi Az étoit coupée en deux parties égales en *y*, en tirant du Point A la parallèle AC à la Tangente TN, cette parallèle tombant au-deſſous (fig. 10.) ou au-deſſus (fig. 11.) de Az, ſeroit auſſi coupée en deux parties égales, par le Diamètre NH au Point *r* (39); l'on auroit donc *Ay*. *yz* :: *Ar*. *rc*. Par conſéquent, ſi l'on tiroit la corde *cz*, elle ſeroit parallèle à *yr* ou à l'Axe AB (279. *Inſt. T.* 2.); ainſi une parallèle à l'Axe de la Parabole, pourroit couper cette Courbe en deux Points. Ce qui eſt abſurde (11).

41. COROL. III. Ainſi une corde AC, coupée en deux parties égales par un Diamètre NH, ſera néceſſairement parallèle à la Tangente au Sommet N de ce Diamètre.

Suppoſons qu'elle ne le ſoit pas; on pourroit donc du Point A mener à cette Tangente une parallèle Az, laquelle tombant au-deſſus ou au-deſſous de AC donneroit *Ay* = *yz* (39). Or, en ſuppoſant AC diviſée en deux parties égales, il eſt impoſſible que *Ay* = *yz* (40); par conſéquent une corde ne ſçauroit être coupée en deux parties égales par un Diamètre de la Parabole, ſans être parallèle à la Tangente au Sommet de ce Diamètre.

42. COROL. IV. Menez par le Sommet M, (fig. 10.) une parallèle MT à une Ordonnée quelconque *tr* au Diamètre ME; je dis que cette parallèle ſera néceſſairement Tangente à la Courbe au Point M.

Si elle ne l'étoit pas, on pourroit donc tirer une Tan-

gente en ce Point, à laquelle l'*Ordonnée ur* ſeroit parallèle (41); & par conſéquent il y auroit au même Point deux parallèles à une même Ligne : ce qui eſt abſurde. Donc, &c.

43. COROL. V. Si deux cordes AH, *u*K (fig. 12.) de la Parabole parallèles entr'elles, ſont coupées en deux parties égales aux Points Q, *r*; je dis que la Ligne Q*r*, mènée par les Points de diviſion, eſt néceſſairement parallèle à l'Axe de la Courbe, c'eſt-à-dire qu'elle eſt un de ſes Diamètres.

Car, ſuppoſant que Q*r* n'eſt pas un Diamètre ou parallèle à l'Axe TB, on pourroit par le milieu *r* de la corde *u*K, tirer *sr*P parallèlement à TB; & alors la corde *u*K ſeroit parallèle à la Tangente *s*T tirée par le Sommet *s* du Diamètre *s*P (41); ainſi AH ſeroit auſſi parallèle à cette Tangente; donc AH ſeroit coupée en deux parties égales au Point *x*, par le Diamètre *sx*P (39): mais (ſupp.) elle eſt auſſi coupée en deux parties égales au Point Q; donc AQ = A*x*, ce qui eſt abſurde. Par conſéquent une Ligne, qui coupe en deux parties égales deux cordes parallèles d'une Parabole, eſt néceſſairement un des Diamètres de cette Courbe.

44. PROBL. Une Parabole étant donnée, trouver un de ſes Diamètres, ſon Axe, & ſon Sommet.

RÉSOL. 1°. Tirez dans la *Parabole* deux cordes quelconques AH, *u*K (fig. 12.) parallèles entr'elles : coupez chacune de ces Lignes en deux parties égales aux Points Q, *r*, & tirez par ces Points la Ligne Q*r*, que vous prolongerez juſqu'à ce qu'elle coupe la Courbe en quelque Point M; & la Ligne MQ ſera un *Diamètre* de la *Parabole* (43).

2°. D'un Point quelconque K (fig. 10.) où l'une des parallèles *u*K coupe la Courbe, abbaiſſez une Perpendiculaire KD ſur le Diamètre MQ, prolongé, s'il en eſt beſoin; & continuez cette Perpendiculaire, juſqu'à ce qu'elle coupe la *Parabole* en un autre Point *q*; enfin ſur le milieu B de cette nouvelle corde K*q*, élevez une Perpendiculaire indéfinie BT; ce ſera l'Axe cherché & le Point A, où elle coupe la Courbe, en ſera le *Sommet*.

45. PROB.

45. PROB. Trouver le *Diamètre* qui paſſe par le Point donné N d'une *Parabole* donnée ; ainſi que la poſition des *Ordonnées* à ce Diamètre (fig. 11.).

RÉSOL. 1°. Trouvez un autre *Diamètre* quelconque MQ (44), & par le Point donné N menez NH parallèlement à MQ, & vous aurez le *Diamètre* cherché ; puiſque MQ étant parallèle à l'Axe de la Courbe (39), ND lui ſera auſſi parallèle, & ſera par conſéquent un Diamètre.

2°. Pour avoir la poſition des *Ordonnées* à ce *Diamètre*, prenez un Point quelconque C, au-deſſous de N ; tirez la corde CN & faites ſon prolongement NT = CN ; menez enſuite par T une parallèle TA au Diamètre NH ; & du Point A, où cette parallèle rencontre la Courbe, tirez au Point C la Ligne AC ; cette Ligne ſera coupée en deux parties égales en *r* : car CN. NT :: C*r*. *r*A. Or (cônſt.) CN = NT ; donc C*r* = *r*A : ainſi AC eſt une corde coupée en deux parties égales par le Diamètre NH ; & par conſéquent AC eſt parallèle à la Tangente au Sommet N de ce Diamètre (41), ce qui détermine la poſition des Ordonnées au Diamètre NH (39).

46. PROB. Tirer une Tangente TM par un Point M quelconque d'une Parabole donnée, ſans avoir recours à ſon Axe, (fig. 10.).

RÉSOL. Trouvez d'abord le *Diamètre* ME qui doit paſſer par le Point M de la Parabole donnée, ainſi que la poſition des *Ordonnées* à ce *Diamètre* (45) ; & menez par ce Sommet M une parallèle MT à quelqu'une des Ordonnées au Diamètre ME ; cette parallèle ſera Tangente à la Parabole au Point M (42).

47. PROBL. Une Parabole étant donnée, trouver un Diamètre NH (fig. 10.) qui paſſe, avec ſes *Ordonnées* A*r*, &c. ainſi qu'avec ſa Tangente N*t* au Sommet N, un Angle A*r*N égal à un Angle oblique quelconque donné *g*.

RÉSOL. Trouvez un Diamètre quelconque AB (44). Au Point A où ce Diamètre coupe la *Parabole*, faites l'Angle *r*AB = *g*. Prolongez A*r*, juſqu'à ce qu'elle coupe la Courbe en un autre Point C ; & par le milieu *r* de AC, menez

*N*r*H* parallèlement à AB ; alors NH ſera un Diamètre (39), dont *A*r ſera une *Ordonnée* (39 & 41) ; laquelle fera, avec ſon Diamètre, l'Angle *A*r*N* = *g*. Car, à cauſe des parallèles AB, NH, l'Angle *A*r*N* = l'Angle r*AB* ; mais r*AB* = *g* (conſt.) ; donc *A*r*N* = *g*. C. Q. F. 1°. T.

2°. Par conſéquent, en tirant par le Sommet N de ce Diamètre une parallèle N*t* à l'Ordonnée *A*r, on aura une Tangente (42), qui fera, avec l'Axe ou tout autre Diamètre, un Angle égal à l'Angle donné *g*.

48. PROPOS. XI. Le Triangle *reu* ou ſon égal r*DK* (38) eſt égal au parallélogramme r*MTS* (fig. 10.).

DÉM. 1°. Ces deux figures ont la partie commune r*Mdu* ; il reſte donc à démontrer que le Triangle *dMe* d'une part, eſt égal à l'autre partie *ud*TS = *ud*OI + IOTS. Mais le Triangle MGO, ou *dMe* + *de*GO = TAO, ou SAI + IOTS (34) ; ajoutant donc de part & d'autre le Quadrilatère *ud*OI, on aura *dMe* + *de*GO + *ud*OI = SAI + IOTS + *ud*OI. Or (37) *ud*OI + *de*GO = SAI. Donc *dMe* = IOTS + *ud*OI = *ud*TS, & par conſéquent *dMe* + r*Mdu* = *ud*TS + r*Mdu* ; c'eſt-à-dire que le Triangle *reu* ou r*DK* = le parallélogramme r*MTS*. C. Q. F. D.

49. PROPOS. XII. Les quarrés des *Ordonnées* AQ, *ur* ; à un Diamètre quelconque ME d'une Parabole, ſont entr'eux comme les *Abciſſes* MQ, M*r* correſpondantes. Il faut donc prouver que $\overline{AQ}^2 . \overline{ur}^2 :: MQ . Mr$.

DÉM. En comparant les Triangles ſemblables AQG, *reu*, ou aura $AQG . \overline{reu}^2 :: \overline{AQ}^2 . \overline{ur}^2$ (306. *Inſt. T.* 2.) ; mais le Triangle AQG = le parallélogramme AQMT (35) ; & le Triangle *reu* = le Parallélogramme r*MTS* (48), ainſi $AQMT . rMTS :: \overline{AQ}^2 . \overline{ur}^2$. Or les parallélogrammes AQMT, r*MTS* ont même hauteur, étant compris entre les mêmes parallèles AT, QM ; donc ils ſont entr'eux comme leurs Baſes correſpondantes MQ, M*r* ; c'eſt-à-dire que $AQMT . rMTS :: MQ . Mr$; & par conſéquent $\overline{AQ}^2 . \overline{ur}^2 :: MQ . Mr$. C. Q. F. D.

50. DÉFIN. Une troiſiéme proportionelle à une Abciſſe Nr (fig. 11.) d'un Diamètre NH d'une Parabole & à ſon Ordonnée correſpondante Ar, eſt appellée *Paramètre* de ce Diamètre [a].

51. COROL. I. Il eſt évident, en vertu de la Prop. XII. que ce *Paramètre* eſt une *Conſtante*; c'eſt-à-dire qu'on trouvera toujours la même troiſiéme proportionelle, de quelque Abciſſe que l'on ſe ſerve; ainſi qu'on l'a démontré (17), par rapport au Paramètre de l'Axe.

52. PROP. XIII. Le quarré d'une Ordonnée quelconque AQ à un Diamètre MD, eſt égal au Rectangle de l'Abciſſe MQ par le Paramètre t de ce Diamètre (fig. 10.).

DÉM. Car puiſque (51) on a toujours MQ. AQ :: AQ. t, on aura $\overline{AQ} = MQ \times t$. Et prenant une autre Ordonnée ur, comme on trouve encore $Mr. ur :: ur. t.$ (51), on en déduira $\overline{ur} = Mr \times t$, &c. donc le quarré d'une Ordonnée, &c.

* 53. COROL. I. Par conſéquent, ſi l'on prenoit une Ligne indéfinie, dont on déterminât l'origine N; que l'on diviſât cette Ligne en un très-grand nombre de parties égales, ou inégales; qu'elle fût coupée aux Points de diviſion par des parallèles Ar, &c. qui fiſſent avec elle un Angle, de maniére qu'elles fuſſent moyennes proportionelles entre leurs Abciſſes correſpondantes Nr & une Ligne *conſtante* t; la Courbe, que l'on feroit paſſer par les extrêmités A, C, &c. de toutes ces moyennes proportionelles, ſeroit telle que le quarré d'une Ordonnée quelconque égaleroit le Rectangle de l'Abciſſe correſpondante par le Paramètre, & ſeroit par conſéquent une *Parabole*; puiſqu'alors les quarrés des Ordonnées ſeroient entr'eux, comme les Abciſſes correſpondantes. Car, ſi cela n'étoit pas, il y auroit quelque Courbe, différente de la *Parabole*, dont tous les Points, rapportez à une même Ligne, donneroient préciſément les mêmes propriétés, ou auroient les mêmes effets

[a] Pour la même raiſon qu'à l'Axe.

que ceux de la Parabole ; ce qui eſt impoſſible, puiſque tous les Points des deux Courbes ſeroient ou pourroient être, en ce cas, les extrêmités des mêmes Lignes ; & par conſéquent tous les Points de ces deux Courbes ſe confondant, ne feroient plus qu'une ſeule & unique Courbe : la Courbe propoſée ne ſeroit donc pas différente d'une *Parabole*.

54. Ce Corollaire eſt la *converſe* de la Propoſit. XIII. & il n'eſt vrai qu'à cauſe que généralement tous les Points de la Courbe ont la même propriété. Car, ſi cette propriété n'étoit démontrée que par rapport à quelques Points, on n'en pourroit pas conclure abſolument que ce fût une *Parabole* ; puiſqu'une autre Courbe pourroit, en coupant la première aux mêmes Points, avoir à ces Points la même propriété que la première ; mais être caractériſée par d'autres propriétés à d'autres Points : ainſi que je le ferai voir plus bas.

REM. On voit par-là combien il eſt indiſpenſable de démontrer les *converſes* ; parce que ce ſont toujours ces propoſitions qui ſervent à la réſolution des Problêmes.

* 55. PROB. La Ligne indéfinie AB (fig. 13.) dont l'origine eſt en A, étant donnée pour un Diamètre d'une Parabole, ainſi que le prolongement AP pour le *Paramètre* de ce Diamètre, décrire la Parabole de manière que l'Angle des Ordonnées à ce Diamètre ſoit égal à l'Angle donné PAO.

RÉSOL. Au Point A menez la Perpendiculaire indéfinie *Ah* ; & d'un Point K tel que KP ſoit > KA, décrivez le Cercle P*eb* ; enſuite, d'un Point I, au-deſſous & le plus près que vous pourrez du Point K, décrivez un autre Cercle P*fc*, & ainſi de ſuite, en prenant toujours des Points au-deſſous de K, très-proches les uns des autres, & faiſant toujours paſſer les circonférences par P : alors, ſi aux Points *b*, *c*, *d*, &c. où ces circonférences coupent le Diamètre AB, vous tirez les Lignes *br*, *cs*, *dt*, &c. qui faſſent avec ce Diamètre un Angle égal à l'Angle donné PAO, & qu'enfin vous faſſiez *br* = A*e*, *cs* = A*f*, *dt* = A*g*, &c.

Je dis que la Ligne *Arst*, &c. qui paſſera par les extrêmitez de ces Lignes, ſera une *Parabole*.

DÉM. Par la nature du Cercle AP. Ae :: Ae. Ab ; or Ae $=$ br (conſt.) ; donc AP. br :: br. Ab. de même AP. Af :: Af. Ac. mais Af $=$ cs ; donc AP. cs. ‹ : cs. Ac, &c. & ainſi des autres parallèles ; elles ſont donc moyennes proportionelles entre leurs Abciſſes correſpondantes & la conſtante AP ; par conſéquent leurs extrêmités *r*, *s*, *t*, &c. ſont à une Parabole (53), dont AB eſt un des Diamètres, qui fait avec ſes Ordonnées un Angle égal à l'Angle donné PAO (conſt).

* 56. COROL. II. Donc, ſi de tous les Points *m*, *n*, *o*, &c. d'une droite indéfinie AO, dont l'origine eſt fixe en A, l'on tire des parallèles *mr*, *ns*, *ot*, &c. qui ſoient entr'elles comme les quarrés $\overline{Am}^2$, $\overline{An}^2$, $\overline{Ao}^2$ des Abciſſes correſpondantes, les extrêmités *r*, *s*, *t*, &c. de ces parallèles ſeront encore à une *Parabole*.

Car tirant l'indéfinie AB parallèlement à *mr*, & faiſant $Ab = mr$; $Ac = ns$; $Ad = ot$, &c. on aura alors $\overline{br}^2 = \overline{Am}^2$; $\overline{cs}^2 = \overline{An}^2$; $\overline{dt}^2 = \overline{Ao}^2$; par conſéquent, puiſque $\overline{Am}^2 . \overline{An}^2 :: \overline{mr}^2 . \overline{ns}^2 :: \overline{Ab}^2 . \overline{Ac}^2$ (ſupp.) on aura $\overline{br}^2 . \overline{cs}^2 :: \overline{Ab}^2 . \overline{Ac}^2$. Donc (53) les Points *r*, *s*, *t*, &c. ſont à une Parabole.

57. COROL. III. Rappellez-vous maintenant la Prop. V. (29), où l'on a démontré que, par rapport à l'Axe, la ſous-Tangente étoit toujours double de l'Abciſſe, quand on ſuppoſoit une Tangente ; & réciproquement, qu'en ſuppoſant la ſous-Tangente double de l'Abciſſe l'on avoit néceſſairement une Tangente, &c. alors vous verrez, ſans qu'il ſoit beſoin de répéter la démonſtration, que ſi d'un Point *f* (fig. 11.) d'une Parabole l'on tire une Tangente *f*O, qui rencontre un Diamètre MQ en O, & que du même Point *f* l'on mène une Ordonnée *f*S à ce Diamètre (45), vous verrez, dis-je, que la ſous-Tangente OS eſt double de l'Abciſſe MS, ou que OM $=$ MS.

Car on n'a démontré cette propriété, par rapport à l'*Axe*, que parce que les quarrés des Ordonnées à l'Axe ſont en-

ſomme de tous ces Triangles différeroit du Segment parabolique, moins que d'une grandeur quelconque, ſi petite qu'on la puiſſe ſuppoſer. Par conſéquent, ſi l'on pouvoit déterminer le rapport de la ſomme de tous ces Triangles à une grandeur connue & quarrable, il eſt évident que l'on auroit la quadrature du Segment parabolique, qui n'eſt autre choſe que la ſomme de tous ces Triangles. Or c'eſt ce que l'on va déterminer dans le Corollaire ſuivant.

* 64. COR. VII. Si l'on inſcrit dans le Segment ANCA (fig. 14.) le plus grand Triangle poſſible ANC (61); ce Triangle ſera quadruple de la ſomme des deux plus grands Triangles CEN, ADN, que l'on peut inſcrire dans les Segmens CENC, ADNA, ou ce qui eſt la même choſe, le Triangle N*r*C, moitié du plus grand Triangle ANC, ſera quadruple du Triangle CEN, & ſon autre moitié A*r*N ſera quadruple de ADN.

DÉM. Menez la Tangente EK, juſqu'à ce qu'elle rencontre le Diamètre prolongé N*r* en quelque Point K (13); tirez auſſi par le Sommet N la Tangente NI, juſqu'à ce qu'elle rencontre, en quelque Point I, le Diamètre EQ prolongé; enfin par les Points E, F, tirez EL, FM, parallèles à la Tangente NI; & conſidérez que, EQ étant parallèle à K*r* (conſt.), ainſi que EK à FN (41), vous aurez EF = KN. Or KN = NL (57), & NL = EI, à cauſe du parallélogramme ELNI; donc EF = EI. Donc FI eſt double de FE; par conſéquent le Triangle NFI eſt double du Triangle NFE, parce que ces deux Triangles ayant même hauteur en N, le premier a une Baſe double de celle du ſecond; mais le Triangle CEN eſt auſſi double de NFE (conſt.); donc le Triangle CEN = NFI. Or NFI = NFM; puiſque la figure FMNI eſt un parallélogramme; donc CEN = NFM. Mais NFM n'eſt que le quart du Triangle

---

on prend la moitié, enſuite la moitié de l'autre moitié, & toujours la moitié de ce qui reſte; il eſt clair, dis-je, que par cette Souſtraction l'on arrivera à un reſte plus petit qu'aucune grandeur donnée; donc on y arrivera, à plus forte raiſon, ſi l'on ne ôte toujours plus de la moitié.

NrC [a]; parce que les côtés du premier ne ſont que la moitié des côtés homologues du ſecond (conſt.). Donc CEN eſt auſſi le quart de NrC, ou le Triangle NrC eſt quadruple de CEN.

Si l'on fait la même conſtruction, par rapport au Triangle ADN, c'eſt-à-dire, en tirant la Tangente DK (59), &c. on trouvera par le même raiſonnement que ci-deſſus, que le Triangle ArN eſt quadruple de ADN; par conſéquent le Triangle entier ANC eſt quadruple de la ſomme des deux Triangles CEN, ADN. C. Q. F. D.

Ce que l'on vient de démontrer du Triangle ANC par rapport aux Triangles CEN, ADN, on le démontrera du Triangle CEN, par rapport aux plus grands Triangles inſcriptibles dans les Segmens CEC, ENE; & du Triangle ADN par rapport aux plus grands Triangles inſcriptibles dans les Segmens ADA, DND; & ainſi de ſuite, en inſcrivant toujours les plus grands Triangles poſſibles, à meſure qu'il naîtra de nouveaux Segmens.

* 65. COROL. VIII. On aura donc une progreſſion ou une ſuite de Triangles, inſcrits dans le Segment parabolique propoſé, leſquels retranchant toujours plus de la moitié du Segment, où ils ſeront inſcrits (62), donneront une ſomme qui pourra être priſe pour la ſurface du Segment parabolique (63). Mais cette progreſſion eſt telle que ſon premier terme eſt quadruple du ſecond; le ſecond quadruple du troiſiéme; le troiſiéme quadruple du quatriéme, & ainſi de ſuite à l'infini (64). Or la ſomme de tous les termes d'une pareille progreſſion, eſt au premier ou au plus grand terme, comme 4 eſt à 3 [b]; par conſéquent le

---

[a] C'eſt-à-dire que $\overline{NFM}.\overline{NrC}::\overline{NF}.\overline{NC}$, ou :: le quarré de 1 eſt au quarré de 2; & ainſi :: 1. 4.

[b] La ſomme S d'une progreſſion infinie deſcendante, dont les deux premiers termes ſont a, b, étant exprimée par la formule $S = \frac{a^2}{a-b}$ (270. *Inſt.* T. 2.); comme, dans l'exemple préſent, le deuxiéme terme b n'eſt que le quart du premier terme a; c'eſt-à-dire que $b = \frac{a}{4}$; ſi l'on met, dans la formule $S = \frac{a^2}{a-b}$, l'expreſſion $\frac{a}{4}$

Segment parabolique ANCA eſt au plus grand Triangle ANC, qui eſt le plus grand de tous les termes, comme 4 eſt à 3; c'eſt-à-dire, qu'un Segment parabolique quelconque vaut toujours les 4 tiers du plus grand Triangle, qui lui eſt inſcriptible. Or tout Triangle eſt quarrable; donc on a la quadrature de la Parabole [a].

* 66. COROL. IX. En diviſant donc la Baſe AC du Triangle ANC en trois parties égales, & augmentant cette Baſe d'une troiſiéme partie, on aura un Triangle qui ſera les 4 tiers de ANC, & par conſéquent égal au Segment parabolique (65).

* 67. COROL. X. Et ſi des Points A, C, on tire les parallèles AZ, CV, au Diamètre Nr, juſqu'à ce qu'elles rencontrent aux Points Z, V, la Tangente au Sommet N de ce Diamètre, l'on aura le parallèlogramme circonſcrit ACVZ, dont le Segment parabolique ANCA ſera les deux tiers. Car il eſt évident que le Triangle ANC n'eſt que la moitié du parallèlogramme ACVZ. Or (65) le Segment ANCA vaut les 4 tiers du Triangle ANC; donc il ne vaudra que les 2 tiers du double de ce Triangle; c'eſt-à-dire, du parallèlogramme circonſcrit ACVZ.

REM. *Cette méthode de quarrer la Parabole, ou de déterminer ſon rapport au parallèlogramme circonſcrit, quoique très-ingénieuſe, eſt longue & aſſez difficile. M'étant donc appliqué à chercher une autre ſolution de ce Problême, j'ai eu le bonheur d'en rencontrer une, appliquable à toutes les Courbes quarrables, & en même-tems ſi élégante, qu'au moyen d'une ſeule proportion l'affaire eſt terminée. Je la fonde ſur un ſeul* Lemme, *que ſe conçoit preſque ſur le ſimple énoncé.*

68. Lemme *pour la quadrature de la Parabole ou de toute autre Courbe quarrable* (fig. 16.). Soit AC une Courbe ou

---

au lieu de b, elle deviendra $S = \frac{aa}{a - \frac{a}{4}} = \frac{aa}{\frac{3a}{4}} = \frac{4aa}{3a} = \frac{4a}{3}$. Donc $S = \frac{4a}{3}$; ou $S \times 3 = 4 \times a$; & par conſéquent S. a :: 4. 3. C. Q. F. D.

[a] C'eſt *Archimède* à qui l'on eſt redevable de cette Méthode de quarrer la Parabole.

une portion de Courbe, toujours concave, ou toujours convexe du même côté; dont BC ſoit l'Axe & AB une Ordonnée. Faiſons de ces deux Lignes le Rectangle BD; diviſons AB ou DC en un très-grand nombre de parties égales; aux Points de diviſion *b*, *g*, *h*, &c. menons les paralléles *bf*, *gk*, &c. à CB; par leurs Points, *r*, *s*, &c. d'interſection avec la Courbe menons des parallèles à AB, afin qu'il en naiſſe des Rectangles, dont les uns ſont *inſcrits* & les autres *circonſcrits* à l'eſpace mix-ti-Ligne ADCA, ainſi qu'à l'eſpace ABCA. Par exemple, le Rectangle *b*A eſt ce que j'appelle un Rectangle *circonſcrit* à l'eſpace ADCA, & le Rectangle *bn* ſon *inſcrit* correſpondant. Pareillement *gr* eſt un autre Rectangle *circonſcrit* à ce même eſpace, dont l'*inſcrit* correſpondant eſt le Rectangle *gq*, &c.

Ceci bien conçû, je dis que l'on peut diviſer DC en un nombre de parties égales, tel que la ſomme des *inſcrits* différera de celle des *circonſcrits*, moins que d'une grandeur donnée quelconque, ſi petite qu'on puiſſe la ſuppoſer.

DÉM. Il eſt évident (conſt. de la fig. 16.) que la différence de la ſomme des *inſcrits* à celle des *circonſcrits* à l'eſpace ADCA, eſt le Rectangle *b*A: or, en faiſant les diviſions ſur DC exceſſivement petites, ce Rectangle peut devenir plus petit qu'aucune grandeur donnée. Donc, &c.

La même figure démontre aux yeux que la différence de la ſomme des *inſcrits* à celle des *circonſcrits* à l'eſpace ABCA, eſt auſſi le Rectangle *b*A. Donc ce Lemme eſt vrai, ſoit qu'on prenne la Courbe par ſa convéxité, ſoit qu'on la conſidére par ſa concavité.

69. COROL. I. Si on employe ici les mêmes raiſonnemens, dont on a fait uſage aux n°. 423. & 424. *Inſt. T.* 2. on connoîtra que la ſomme des *inſcrits*, celle des *circonſcrits* & la ſurface de l'eſpace ADCA, ou ABCA, auquel ils ſont inſcrits ou circonſcrits, ſont trois grandeurs abſolument égales, ou qui ne different entr'elles que d'une quantité plus petite qu'aucune grandeur donnée.

70. *Quadrature très-ſimple de la Parabole* (fig. 17.). Soit

la demi Parabole ABC; AB ſa Baſe; AT ſa Tangente au Point A, & par conſéquent BC = CT (29); BD ſon parallèlogramme circonſcrit. Soit de plus DC diviſée en un très-grand nombre de portioncules égales, telles que D*b*; & par les Points de diviſion *b* ſoient menées des parallèles à AD, comme *bf*; afin de tirer par le Point d'interſection *r* de la Courbe, une parallèle *n*M à la Ligne AB: ce qui produira des Rectangles DA*fb*, circonſcrits à l'eſpace DACD, & *n*ABM circonſcrits à l'eſpace parabolique ABC.

Cette conſtruction ſuppoſée, conſidérant la portioncule *r*A de la Courbe, comme une partie de ſa Tangente AT, les Triangles ſemblables *r*A*f*, ABT, donneront BT. AB :: *rf*. *f*A; or BT = 2 CB (29), & *rf* = BM; donc 2 CB. AB :: BM. *f*A; ainſi *f*A = $\frac{AB \times BM}{2\,CB}$; donc, puiſque CB = *bf*, *f*A × *bf* = $\frac{AB \times BM \times CB}{2\,CB}$ = $\frac{AB \times BM}{2}$; c'eſt-à-dire que le Rectangle *f*A × *bf*, circonſcrit à l'eſpace DACD, n'eſt que la moitié du Rectangle AB × BM circonſcrit à l'eſpace parabolique ABCA; & la même choſe arrivera à tous les autres Points de la Courbe, déterminés comme le Point *r*. La ſomme des Rectangles circonſcrits à l'eſpace DACD, n'eſt donc que la moitié de la ſomme des circonſcrits à l'eſpace parabolique ABCA. Mais; dans une diviſion pouſſée très-loin, chaque ſomme co-incide avec ſon eſpace (69). Ainſi l'eſpace DACD eſt la moitié de l'Aire de la demi-parabole ABCA. Donc l'eſpace DACD étant = 1, la ſurface ABCA de la demi-Parabole ſera = 2, & le Rectangle BD = 3; c'eſt-à-dire que la demie-Parabole ABCA ſera les 2 tiers du parallèlogramme circonſcrit BD; ainſi qu'on l'a vû n°. 67. mais par une voye beaucoup plus difficile. C. Q. F. T. & D. [*a*].

[*a*] Cette Réſolution eſt évidemment plus ſimple que celle que l'on trouve par le *Calcul intégral*; puiſque, ſans employer plus d'*Eléments*, je ſçai me paſſer de ce Calcul, qui de plus ſuppoſe le *Différentiel*. Si l'on ajoute à cet avantage la clarté de la méthode des *Limites* ou d'*Exhauſtion* dont je fais uſage, je ne doute pas que cette Quadrature ne ſoit fort du goût des Connoiſſeurs en ces matières.

* 71. COROL. II. Donc, pour avoir l'Aire du Segment parabolique ANC (fig. 15.), il faut y inſcrire le plus grand Triangle poſſible (61); &, après en avoir déterminé la ſurface, y ajouter le tiers de ſa valeur. Par ce moyen l'on aura les 4 tiers du Triangle ANC, leſquels vaudront la ſurface du Segment ANCA (65).

Ou bien, circonſcrire à ce Segment le parallèlogramme ACPT, & prendre les 2 tiers de ſon Aire (70).

La méthode énoncée au n°. 68. eſt fort propre à nous faire découvrir la SOLIDITÉ du *Paraboloïde*, c'eſt-à-dire, d'un corps engendré par la circonvolution d'une Parabole autour de ſon Axe.

* 72. *Cubature du Paraboloïde ou évaluation de ſa ſolidité* (fig. 18.) Diviſez l'Axe CB en un nombre indéfini de parties égales *cd*, *dl*, &c. les plus petites que vous pourrez concevoir; afin d'y inſcrire & d'y circonſcrire des Rectangles comme la figure le montre. Il eſt évident que la différence des *circonſcrits* aux *inſcrits* eſt le Rectangle *d*D, qui peut devenir plus petit qu'aucune grandeur donnée. Imaginons préſentement que la Parabole faſſe une circonvolution autour de ſon Axe; elle engendrera un *Paraboloïde*, & les Rectangles, tant les *inſcrits* que les *circonſcrits*, engendreront des Cylindres, dont les rayons des Baſes circulaires ſeront des Ordonnées à la Parabole; de manière que la différence de la ſomme des Cylindres *circonſcrits* à celle des *inſcrits*, ſera le Cylindre décrit par le Rectangle *d*D; & par conſéquent ce Cylindre pourra devenir plus petit qu'aucune grandeur donnée. Donc on pourra prendre le Paraboloïde, pour la ſomme des Rectangles *circonſcrits* ou celle des *inſcrits*; parce que ſa différence à la ſomme des *inſcrits* ou à celle des *circonſcrits* eſt viſiblement plus petite que celle des *circonſcrits* aux *inſcrits*.

Donc, ſi nous pouvons déterminer le rapport de la ſomme des *circonſcrits* ou de celle des *inſcrits* à quelque grandeur connue, dont il ſoit facile d'avoir la ſolidité, il eſt clair que nous aurons celle du Paraboloïde. Or le Cylindre décrit par le Rectangle *dh*, eſt au Cylindre décrit par le Rectangle

li, de même hauteur (ſupp.), comme la Baſe circulaire du premier eſt à celle du ſecond, & ces Baſes ſont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ds, lt, ou :: $\overline{ds}^2 . \overline{lt}^2$. mais $\overline{ds}^2 . \overline{lt}^2$ :: $cd . cl$ (6) :: 1. 2 (conſt.); donc le Cylindre décrit par le Rectangle db, eſt au décrit par le Rectangle li. :: 1. 2. Et l'on démontrera préciſément de même que le Cylindre décrit par le Rectangle db, eſt au décrit par le Rectangle gf :: 1. 3. &c. en ſorte que la ſomme de tous ces Cylindres circonſcrits, formera une progreſſion Arithmétique 1, 2, 3, 4, &c. ou 0, 1, 2, 3, 4, &c. Mais on a la ſomme d'une pareille progreſſion, c'eſt-à-dire, celle de tous les Cylindres circonſcrits, leſquels pris enſemble ne ſont pas différens du Paraboloïde, en multipliant le plus grand terme, c'eſt-à-dire en ce cas, le Cylindre décrit par le Rectangle Bm, en le multipliant, dis-je, par la moitié du nombre des termes [*a*], ou par la moitié de la hauteur CB

[*a*] 1°. J'ai démontré (n°. 260. *Inſt.* T. 2.) que dans une proportion Arithmétique, la ſomme des Extrêmes eſt égale à celle des Moyens.

2°. Ainſi, dans une progreſſion Arithmétique quelconque $+ a . b . c . d . e . f . g .$ &c. la ſomme $c + e$ de deux termes quelconques c, e, à égale diſtance des Extrêmes a, g, eſt égale à la ſomme $a + g$ de ces Extrêmes. Car, en développant la progreſſion propoſée, elle deviendra $a . b :: b . c :: c . d :: d . e :: e . f :: f . g$, *&c.* (M); où l'on voit d'abord que $a . b :: f . g$. Donc (art. premier) $a + g = b + f$; il eſt clair auſſi que $b . c :: e . f$; ainſi $b + f = c + e$; donc $c + e = a + g$.

3°. Par conſéquent le nombre des termes de la progreſſion étant impair, comme dans la propoſée, le terme du milieu $d = \frac{a+g}{2}$ moitié de la ſomme des Extrêmes. En reprenant la progreſſion M, il eſt viſible que $c . d :: d . e$; donc $2d = c + e = a + g$ (art. 2.); ainſi $d = \frac{a+g}{2}$.

4°. D'où il ſuit, que la ſomme de tous les termes d'une progreſſion Arithmétique quelconque, eſt égale à la ſomme des Extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes de la progreſſion. Car, ſi le nombre des termes eſt pair, en réduiſant la progreſſion en ſommes de deux termes à égale diſtance des Extrêmes, le nombre de ces ſommes ne ſera que la moitié de celui des termes de la progreſſion. Or chaque ſomme eſt égale à celle des Extrêmes (art. 2.); ainſi, dans la ſomme des termes d'une progreſſion Arithmétique, celle des Extrêmes s'y trouve autant de fois, qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre de ſes termes. Donc, pour avoir la ſomme de ſes termes, il faut multiplier la ſomme des Extrêmes par la moitié du nombre des termes.

Si le nombre eſt impair, en ſuppoſant le terme du milieu ôté, on auroit la ſomme des autres, en multipliant celle des Extrêmes par la moitié du nombre des termes reſtans; donc, pour compléter la ſomme de la progreſſion, il faudroit y remettre le

qui exprime ce nombre ; & en multipliant ce même Cylindre par toute la hauteur CB, on a le Cylindre décrit par le Rectangle BD. D'où l'on voit que *le Paraboloïde n'eſt que la moitié du Cylindre de même Baſe & de même hauteur, qui lui eſt circonſcrit.*

73. PROPOS. XIV. Le quart du Paramètre t d'un Diamètre quelconque MD (fig. 10.) eſt égal au quart du Paramètre p de l'Axe, joint à l'Abciſſe AP déterminée par l'Ordonnée MP menée du Sommet M de ce Diamètre, c'eſt-à-dire que $\frac{t}{4} = x + \frac{p}{4}$.

DÉM. Par le Sommet M du Diamètre MD tirez la Tangente MT, & par le Sommet A de la Parabole menez, parallèlement à MT, la Ligne AQ, qui ſera une Ordonnée au Diamètre MD. Et remarquez que $AQ = MT$; $MQ = AT$ (conſt.) $= AP = x$; $PT = 2x$ (29) ; $\overline{PT}^2 = 4xx$; $\overline{PM}^2 = px$ (20). Or $\overline{AQ}^2 = MQ \times t$ (52) ; donc $t = \frac{\overline{AQ}^2}{MQ} = \frac{\overline{MT}^2}{AT}$; mais, à cauſe du Triangle-Rectangle MPT, on a $\overline{MT}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{PM}^2$. Donc $t = \frac{\overline{PT}^2 + \overline{PM}^2}{AP} = \frac{4xx+px}{x} = 4x + p$. Donc $\frac{t}{4} = x + \frac{p}{4}$.

74. COROL. Puiſque $t = 4x + p$, il s'enſuit que $p < t$; c'eſt-à-dire que le Paramètre de l'Axe eſt le plus petit de tous les Paramètres.

75. PROPOS. XV. Si au Sommet M d'un Diamètre quelconque MI (fig. 19.), on tire la Tangente MT, & qu'on faſſe l'Angle TMF = l'Angle TMO, que cette Tangente forme avec le Diamètre MI prolongé ; le côté MF ira rencontrer l'Axe en un Point F, tel que MF = le quart du

---

terme ôté, qui eſt égal à la moitié de la ſomme des Extrêmes (art. 3.) ; la ſomme entière ſeroit donc égale à la ſomme des Extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes pairs, plus la moitié de celui du terme impair ; c'eſt-à-dire, par la moitié du nombre de tous les termes.

5°. Si l'on ſuppoſe donc la progreſſion aſcendante, & ſon premier terme zéro, la ſomme des Extrêmes ne ſera plus que le dernier terme ; & par conſéquent (art. 4.) la ſomme de tous les termes d'une pareille progreſſion ſera égale à ſon dernier ou plus grand terme multiplié par la moitié du nombre de ſes termes. C. Q. F. D.

Paramètre de ce Diamètre ; c'eſt-à-dire que MF $= \frac{t}{4}$ ou $= x + \frac{p}{4}$ (73).

DÉM. Faites MO = MF, & tirez FO. Il eſt clair que FO eſt perpendiculaire ſur MT, puiſqu'en comparant les deux Triangles MyF, MxO, on a l'Angle MFO = MOF, & TMF = TMO (conſt.) ; donc l'Angle $y = x$. La Ligne FO eſt donc Perpendiculaire ſur MT. Ainſi élevant au Point de contingence M la Perpendiculaire ML ſur MT, la fig. OFLM eſt un parallèlogramme ; donc MO = FL. Or (conſt.) MO = MF. Donc MF = FL ; ainſi FP = FL — PL = MF — PL. Mais la ſous-Perpendiculaire $PL = \frac{p}{2}$ (31) ; donc $FP = MF - \frac{p}{2}$; donc $\overline{FP}^2 = \overline{MF}^2 - p \times MF + \frac{pp}{4}$. Ainſi, puiſque le Triangle-Rectangle FPM donne $\overline{MF}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{PM}^2$ (S), on aura (en mettant dans l'équation S, $\overline{MF}^2 - p \times MF + \frac{pp}{4}$ pour $\overline{FP}^2$, & px pour $\overline{PM}^2$) $\overline{MF}^2 = \overline{MF}^2 - p \times MF + \frac{pp}{4} + px$; donc (en ôtant $\overline{MF}^2$ & tranſpoſant $- p \times MF$) on a $p \times MF = px + \frac{pp}{4}$. Ainſi (en diviſant par p) $MF = x + \frac{p}{4} = \frac{t}{4}$ (73). C. Q. F. D.

76. COROL. I. D'où il ſuit que la Ligne MF rencontre l'Axe en un Point F au-deſſous du Sommet A. Car, à cauſe du parallèliſme des Lignes TL, OM, l'Angle FTM = TMO. Or TMO = TMF (conſt.) ; donc FTM = TMF ; donc TF = FM : mais FM $= x + \frac{p}{4}$ (75), ainſi TF $= x + \frac{p}{4}$; mais TA ne vaut que x ; puiſqu'il eſt égal à l'Abciſſe AP (29) ; donc TF > TA, & par conſéquent le Point F tombe au-deſſous de A.

77. COROL. II. Et ſi du Point O l'on abbaiſſe OK perpendiculairement ſur l'Axe, le Point K tombera au-deſſus du Sommet A ; puiſqu'alors la fig. OMPK étant un parallèlogramme, on a PK = MO = FM (conſt.) $= x + \frac{p}{4}$ (75) ; donc PK $= x + \frac{p}{4}$. Mais PA $= x$. Donc PK > PA ; c'eſt-à-dire que le Point K tombe au-deſſus du Sommet A.

78. PRO

78. PROPOS. XVI. La distance du Point F, ainsi que celle du Point K, au Sommet A de l'Axe, est égale au quart du Paramètre de l'Axe; c'est-à-dire que AF ou AK $= \frac{p}{4}$.

DÉM. 1°. Par la Proposition XV. $x + \frac{p}{4} =$ MF $=$ TF (const.) $=$ TA $+$ AF $=$ AP $+$ AF (29) $= x +$ AF. Ainsi $x + \frac{p}{4} = x +$ AF. Donc AF $= \frac{p}{4}$.

2°. $x + \frac{p}{4} =$ MF $=$ MO (const.) $=$ PK $=$ PA $+$ AK $= x +$ AK. Donc $x + \frac{p}{4} = x +$ AK; d'où l'on voit que AK $= \frac{p}{4}$. C. Q. F. D.

79. COROL. I. Donc 1°. AF $=$ AK. 2°. FK $=$ AF $+$ AK $= \frac{p}{4} + \frac{p}{4}$ (78) $= \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$; c'est-à-dire que FK $=$ la moitié du Paramètre de l'Axe.

80. COROL. II. Comme le Diamètre MI a été pris à volonté, il est évident qu'en faisant passer, par un Point M quelconque d'une Parabole, un Diamètre MI & une Tangente MT, si l'on fait l'Angle TMF $=$ TMO, formé par la Tangente & le Diamètre prolongé, le côté MF ira toujours rencontrer l'Axe au même Point F; puisqu'on trouvera, dans tous les cas, que la distance AF de ce Point au Sommet de la Parabole, est égale au quart du Paramètre de l'Axe (78); lequel Paramètre est une grandeur constante.

81. PROPOS. XVII. Supposant la const. de la Prop. XV. Je dis que le Point F est un FOYER *Focus vel umbilicus*; c'est-à-dire que des rayons de lumière, qui viendroient frapper la concavité de la Parabole, parallèlement à son Axe, se réfléchiroient tous au Point F.

DÉM. Car l'Angle d'incidence IM*q* $=$ l'Angle TMO, formé par le Diamètre & la Tangente; or TMO $=$ TMF (const.); donc TMF $=$ IM*q*; c'est-à-dire que le rayon IM se réfléchira dans la Ligne MF; puisque l'Angle IM*q*, que le rayon fait en tombant sur la Ligne TM*q*, est toujours égal à celui que ce même rayon fait, en se relevant de dessus la même Ligne (suivant le principe fondamental de la *Catoptrique*). Par conséquent les rayons, parallèles à l'Axe de la Parabole, se réfléchiront toujours de manière que l'Angle de réflexion TMF sera égal à l'Angle TMO, formé par

le Diamètre & la Tangente, tirés au Point d'incidence M; or, quand cela arrive, la Ligne de réflexion MF va toujours rencontrer l'Axe au même Point F (80); donc le Point M eſt un *Foyer*.

82. Réciproquement, des rayons de lumière FM, qui partiroient du *Foyer* F, & fraperoient la concavité de la Parabole en un Point quelconque M, ſe réfléchiroient dans une Ligne OMI, parallèle à l'Axe AB de cette Courbe.

DÉM. En tirant du Point M la Tangente MT, & l'Ordonnée MP à l'Axe, il eſt aiſé de remarquer que FT = AT + AF = AP + AF = $x + \frac{p}{4}$ (78). Or MF = $x + \frac{p}{4}$ (75); donc FT = MF; donc l'Angle FTM = FMT; mais l'Angle d'incidence FMT = l'Angle de réflexion IMq (par le principe de Catoptrique) = OMT ſon oppoſé au Sommet; par conſéquenc l'Angle FTM = OMT; c'eſt-à-dire que les Angles alternes, internes ſont égaux; donc la Ligne OMI dans laquelle ſe réfléchit le rayon FM, eſt parallèle à l'Axe AB ou TAB. C. Q. F. D.

Cette Propoſition eſt célèbre & d'un très-grand uſage dans la Catoptrique.

83. PROBL. Une Parabole étant donnée, trouver ſon *Foyer*. (fig. 19.).

RÉSOL. Trouvez ſon Axe AB & le Paramètre de cet Axe (27 & 44); portez le quart de ce Paramètre depuis le Sommet A de la Courbe, juſqu'en un Point F de l'Axe, & ce Point F ſera le *Foyer* de la Courbe (78 & 81).

84. COROL. I. Ainſi, en regardant l'Axe comme un Diamètre, on voit que le Paramètre d'un Diamètre quelconque, eſt toujours quadruple de la diſtance du Sommet de ce Diamètre au *Foyer*. 1°. Cela vient d'être démontré par rapport à l'Axe (Propoſ. XVI. & XVII.). 2°. La même choſe a été démontrée (Propoſ. XV.) par rapport à un Diamètre quelconque.

85. COROL. II. Par conſéquent, le *Foyer* d'une Parabole étant donné, avec le Sommet de cette Courbe, on aura le *Paramètre* d'un Diamètre quelconque, en prenant le quadruple de la diſtance de ce *Foyer* au Sommet du Diamètre propoſé.

86. PROBL. Le Foyer F & l'Axe d'une Parabole étant donnés, tirer une Tangente en un Point quelconque M de la Courbe.

RÉSOL. Prenez avec un compas ordinaire la distance FM ; portez-là sur l'Axe de F en T, & tirez TM ; ce sera la Tangente cherchée.

DÉM. Abbaissez l'Ordonnée MP, pour avoir l'Abciſſe AP = x. On a démontré (75) que MF = $x + \frac{p}{4}$. Or MF = TF (const.) donc TF = $x + \frac{p}{4}$, & FP = AP — AF = $x - \frac{p}{4}$ (78) ; ainsi TF + FP, c'est-à-dire, PT = $x + \frac{p}{4} + x - \frac{p}{4} = 2x$. Ce qui signifie que PT est le double de l'Abciſſe AP. Donc TM est une Tangente (30).

De toutes les manières d'avoir une Tangente, celle-ci est la plus aisée, quand on a le Foyer & l'Axe de la Courbe.

87. Réciproquement, si MT est Tangente, & que du Point de contingence M l'on mène MF au Foyer, cette Ligne MF sera égale à la distance FT du Foyer au Point T, où la Tangente rencontre l'Axe. Car, en abbaissant l'Ordonnée MP, on a AP = AT = x (29) ; ainsi AT + AF, c'est-à-dire, FT = $x + \frac{p}{4}$; mais MF = $x + \frac{p}{4}$ (75) ; donc MF = FT.

* 88. On tire de la Résolut. de ce Problème & du n°. 29. une Proposition, dont M. *Newton* fait usage dans ses *Principes*. Nous la rapporterons, après avoir expliqué les termes que l'on y employe (fig. 20.).

Quand un corps *m* ou M se meut dans une Parabole ou toute autre Section conique, les Lignes F*m*, FM, tirées du Foyer de la Courbe aux Points *m*, M, où se trouve le *Mobile*, s'appellent *Rayons Vecteurs*, du Latin *Vector*, Porteur ; parce que le Rayon porte en quelque sorte le mobile. Cela supposé.

* 89. COROL. III. Si aux Points M, *m*, où se trouve le mobile, on tire les Tangentes MT, *mt* ; & que du *Foyer* F on abbaisse les Perpendiculaires FR, F*r*, sur ces Tangentes, ces Perpendiculaires seront entr'elles comme les Racines

quarrées des *Rayons Vecteurs* FM, F*m*, tirés aux Points de contact M, *m*; c'eſt-à-dire que FR. F*r* :: $\sqrt[2]{FM}$. $\sqrt[2]{Fm}$.

DÉM. Puiſque MT eſt Tangente, on a (87) MF = FT; donc la Perpendiculaire FR tombe ſur le milieu R de MT (Dém. du n°. 79. *Inſt. T.* 1.); ainſi en tirant la Perpendiculaire au Sommet A, elle paſſera par le Point R; car menant l'Ordonnée MP, on aura TA. AP :: TR. RM. Or AT = AP (29); donc TR = RM; la Perpendiculaire au Sommet A, paſſe donc par le milieu R de la Tangente MT. Et l'on prouvera de même que F*r* tombe ſur le milieu *r* de *mt*, & que AR paſſe par le Point *r*.

Conſidérez maintenant le Triangle-Rectangle FRT, dans lequel on a abbaiſſé de l'Angle droit la Perpendiculaire RA, & vous aurez FT. FR :: FR. FA (292. *Inſt. T.* 2.); Donc $\overline{FR}^2$ = FT × FA. Mais FT = FM (87); ainſi $\overline{FR}^2$ = FM × FA. Pareillement on aura, dans le Triangle F*rt* Rectangle en *r*, F*t*. F*r* :: F*r*. FA. Donc $\overline{Fr}^2$ = F*t* × FA. Or F*t* = F*m* (87); ainſi $\overline{Fr}^2$ = F*m* × FA. Et par conſéquent $\overline{FR}^2$. $\overline{Fr}^2$ :: FM × FA. F*m* × FA :: FM. F*m*. Donc, en tirant les Racines quarrées, FR. F*r* :: $\sqrt[2]{FM}$. $\sqrt[2]{Fm}$. C. Q. F. D.

90. COROL. IV. Si, après avoir fait AK = AF = $\frac{p}{4}$ (fig. 19.), l'on élève au Point K la Perpendiculaire KS nommée *Directrice*, prolongée indéfiniment de part & d'autre du Point K; chaque Point du Périmètre de la Parabole ſera autant éloigné de cette Perpendiculaire que du *Foyer* F; c'eſt-à-dire qu'en abbaiſſant d'un Point quelconque M, une Perpendiculaire MO ſur KS, on aura toujours MO = MF. Car, ſuppoſant l'Ordonnée MP, on aura MO = PK = PA + AK = $x + \frac{p}{4}$ (conſt.) = MF (75); donc MO = MF.

91. Les Géomètres appellent *Directrice* l'indéfinie KS; parce qu'en vertu de ſa propriété, elle peut diriger dans la conſtruction de la Courbe, comme on le verra bientôt.

92. COROL. V. L'Ordonnée FN au *Foyer* eſt égale à la

moitié du Paramètre de l'Axe ; c'eſt-à-dire que FN $= \frac{p}{2}$. Puiſque nous venons de voir (90) que FN = NG ; or NG = FK (conſt.) $= \frac{p}{2}$ (79). Donc FN $= \frac{p}{2}$.

93. COROL. VI. Donc, en prolongeant NF, juſqu'à ce qu'elle rencontre l'autre branche de la Courbe, on aura la double Ordonnée au *Foyer* égale au *Paramètre* de l'Axe.

94. COROL. VII. La Perpendiculaire A*x* au Sommet A de l'Axe, eſt Tangente à la Parabole, on ne touche cette Courbe qu'en un ſeul Point.

Car, ſi elle la touchoit en quelqu'autre Point *d* ; en abbaiſſant *dg* perpendiculairement ſur la *Directrice* KS, & menant *d*F au *Foyer*, l'on auroit F*d* = *dg* (90) = AK (conſt.) = AF (79) ; donc F*d* = AF. Ce qui eſt abſurde ; n'étant pas poſſible que l'hypothénuſe F*d* d'un Triangle-Rectangle FA*d* ſoit égale à l'un de ſes côtés AF. Donc, &c.

* 95. PROBL. FB = *p* étant donnée pour le Paramètre d'une Parabole, conſtruire cette Courbe en ſe ſervant d'une *Directrice*. (fig. 19.)

RÉSOLUT. Prenez une Ligne quelconque AB pour l'Axe de la Parabole à conſtruire, & dont l'origine ſoit en A. Portez enſuite ſur l'Axe le quart $\frac{p}{4}$ du Paramètre, de A en F & K ; & prenant F pour le *Foyer* de la Courbe (83), vous élèverez au Point K l'indéfinie KS, qui en ſera la *Directrice* (90 & 91). Prenez ſur cette Directrice un Point O quelconque ; élevez-y une Perpendiculaire OI ; tirez de ce même Point la Ligne OF au *Foyer*, & faites l'Angle OFM = FOM ; je dis que le Point M, où FM rencontrera la Perpendiculaire OI, ſera à une Parabole, dont le Paramètre ſera FB, le Foyer F, & la Directrice KS. Il n'y aura donc qu'à prendre d'autres Points ſur la Directrice ; & faire à leur égard la même conſtruction, que l'on vient de faire par rapport au Point O ; & l'on aura, par ce moyen, autant de Points de la Courbe qu'on voudra.

DÉM. Après avoir abbaiſſé du Point M la Perpendiculaire MP = *y* ſur l'Axe AB, & fait AP = *x* ; remarquez que MF = MO, à cauſe du Triangle iſoſcèle FMO (conſt.) ; or MO = PK (conſt.) = AP + AK = $x + \frac{p}{2}$

(conſt.); donc MF $=x+\frac{p}{4}$. Ainſi $\overline{MF}^2 = xx+\frac{px}{2}+\frac{pp}{16}$; & PF $=$ AP $-$ AF $=x-\frac{p}{4}$; donc $\overline{PF}^2 = xx-\frac{px}{2}+\frac{pp}{16}$: mais le Triangle-Rectangle FPM donne $\overline{MF}^2 = \overline{PF}^2+\overline{MP}^2$, c'eſt-à-dire (en ſubſtituant les valeurs analytiques) $xx+\frac{px}{2}+\frac{pp}{16} = xx-\frac{px}{2}+\frac{pp}{16}+yy$; donc (en ôtant de part & d'autre $xx+\frac{pp}{16}$, & faiſant paſſer dans le premier membre $-\frac{px}{2}$) vous aurez $\frac{2px}{2}$ ou $px=yy$. Ce qui démontre que le Point M, ou tout autre Point trouvé de la même manière, eſt à une Parabole (20); puiſque le quarré de l'Ordonnée eſt égal au Rectangle du Paramètre par l'Abciſſe correſpondante, &c. [a].

---

[a] Je finis la Théorie de cette Courbe, par où la plûpart des Modernes ont coutume de la commencer. Quoique la Parabole ait pris naiſſance dans le Cône, ils ont mieux aimé la décrire en conſéquence de quelques-unes de ſes propriétés, & déduire de cette deſcription tout ce qu'ils avoient à en dire, qu'à partir, comme nous avons fait, de la ſimple ſuppoſition, que l'on coupât un Cône parallèlement à un côté du Triangle par l'Axe de ce ſolide. Ainſi la Deſcription de ces Auteurs, ſuppoſant la connoiſſance de quelques propriétés de la Courbe qu'ils veulent faire connoître, ne fait point découvrir ces propriétés. C'eſt pourquoi nous avons cru devoir prendre une autre route, pour trouver, par une chaîne non-interrompue de propoſitions, ces mêmes propriétés que les Modernes ſuppoſent, & qu'ils n'auroient pas évidemment ſuppoſées, s'ils n'avoient déja connu la nature de la Courbe. On eſt principalement redevable à *Apollonius* de la découverte ou de la collection de la plûpart des propriétés qui caractériſent cette Courbe; mais, malgré le travail de M. *Barrow*, Anglois, ſur ce précieux monument de l'antiquité, il me paroît que ſans une vocation irréſiſtible pour la Géométrie, il n'eſt pas poſſible d'en ſoutenir la lecture. Juſqu'à l'énoncé même de ces propoſitions, tout s'y préſente obſcurément, avec très-peu d'ordre, & par conſéquent beaucoup de difficulté. *Archiméde* a précédé Apollonius dans ce travail, & nous a donné là-deſſus de très-belles découvertes. Les Modernes ont pris la peine de les développer à leur façon; & je les donne ici dans l'ordre où je les ai conçues, engendrées immédiatement les unes des autres, ſans y rien ſupprimer. Ce que je n'ai vû exécuté nulle part.

Uſage de la Parabole dans le Jet des Bombes, ou d'un Projectile quelconque.

AVERTISSEMENT. *Les Commençans peuvent paſſer toute cette doctrine ; mais, en même-tems qu'ils ſe priveront d'un très-beau ſpectacle pour l'eſprit, ils auront le déſagrément d'ignorer ou de ne connoître que par écho, une ſuite de découvertes qui ont fait beaucoup d'honneur au 17 & au dix-huitiéme ſiécle.*

96. VOICI une Science toute nouvelle [a], & ſur laquelle les anciens ne nous ont abſolument rien laiſſé ; quoique l'uſage fréquent de leurs machines de guerre, les *Ba-*

[a] Les Sciences ne doivent proprement compter leur origine, que du tems où elles ont acquis des principes ſûrs, & des méthodes fondées ſur ces principes. Ainſi, quoique le *jet des bombes* puiſſe être réduit, à certains égards, au jeu des Baliſtes & des Catapultes, machines de guerre ſi connues chez les Anciens, nous nous garderons bien de lui donner une origine ſi reculée. Nous ne le ferons pas même remonter juſqu'à l'année 1588, qui eſt, ſelon M. *Blondel*, la date des premières bombes que l'on ait vûes en Europe, & que le Comte de *Manſfeld* fit jetter dans la Ville de *Wachtendonck* en Gueldres, Province de Hollande, lorſqu'il en faiſoit le ſiége ſous le Prince de Parme ; parce qu'alors on n'avoit d'autre régle pour cet Art, que le pur tâtonnement.

C'eſt pourquoi *Galilée*, Philoſophe de Florence, me paroît être ſans contredit l'inventeur de cette Science ; laquelle ſur ce pied-là n'a pas 150 ans d'ancienneté, ce grand homme étant mort en 1642. Je me fonde ſur ce qu'il a inventé le premier les loix qu'obſervent les corps dans leur aſcenſion & dans leur chûte, lorſqu'ayant reçu une impulſion quelconque, ils ſont abandonnés à l'action de leur peſanteur.

Effectivement il me ſemble que le titre d'inventeur, titre ſi diſtingué, convient uniquement à celui qui a non-ſeulement découvert les principes ou la théorie d'un Art ; mais dont le pénétrant génie en ayant apperçu tout-à-coup l'étendue, en fit ſur le champ l'application aux principaux Problémes de la doctrine du *jet des bombes*. Ce qu'on y a ajouté dans la ſuite, pour finir ou achever cette Science, quoique très-digne de l'eſtime des Connoiſſeurs, ne peut paſſer que pour un développement ; puiſqu'il ne ſuppoſe aucune loi nouvelle.

Il eſt vrai que c'eſt un développement, où il y a beaucoup de ſagacité ; & un grand Art de manier la Géométrie : mais enfin *Galilée* avoit ouvert la route, & fourni toutes les *Données* des Problémes : au lieu qu'avant ce rare génie, on ne ſçavoit pas même comment s'y prendre. Les hommes de tous les ſiécles, qui l'ont précédé, n'avoient là-deſſus rien imaginé d'exact ; quoiqu'ils euſſent nos mêmes beſoins. Il eſt donc juſte que cet illuſtre Italien ait toute la fleur de cette gloire, & que les autres ſe contentent du mérite de s'être apperçus, qu'à cet égard il étoit digne d'être leur Maître.

liſtes & les *Catapultes*, eût dû les y conduire. *Galileo Galilei*, Italien, & vulguairement nommé *Galilée*, en eſt l'inventeur. Elle eſt fondée ſur les loix, qu'obſervent les corps peſans dans leurs chûtes; lorſqu'abandonnés à eux-mêmes ou à la ſeule action de leurs propres poids, ils deſcendent vers la ſurface de la terre. Pour peu que l'on ait ouvert les yeux ſur le mouvement des corps, on a remarqué qu'ils frappoient la terre avec plus de force, quand ils tomboient de plus haut.

Si un corps alloit toujours également vîte, dans les différens inſtans de ſa chûte, il n'auroit pas plus de force à la fin qu'au commencement; or, puiſque le contraire arrive, il eſt néceſſaire que ſa vîteſſe augmente à chaque inſtant, c'eſt-à-dire que dans le ſecond inſtant il parcourt un eſpace plus grand que dans le premier; plus dans le troiſiéme que dans le ſecond, & ainſi de ſuite. Mais ſuivant quelle loi ſe fait cette augmentation de vîteſſe?

En ſuppoſant la peſanteur conſtante, c'eſt-à-dire que le corps, à chaque inſtant de ſa chûte, ſoit ſollicité au mouvement par une force qui ne ceſſe de ſe répéter également dans chaque Point de ſon trajet, Galilée découvrit d'abord par la ſeule force du raiſonnement, à ce que l'on aſſure [a], & ſe convainquit enſuite par l'expérience, que *les eſpaces qu'un corps parcourt en tombant, forment la progreſſion Arithmétique* 1, 3, 5, 7, 9, *&c.* de manière que, ſi dans le premier inſtant, il s'avance de 1 toiſe vers la ſurface de la terre, il en fera 3 dans le ſecond inſtant, 5 dans le troiſiéme, 7 dans le quatriéme; & ainſi de ſuite.

97. COROL. I. D'où il ſuit que, *les eſpaces parcourus ſont entr'eux, comme les quarrés des tems employés à les parcourir*, en prenant le premier terme de ces eſpaces, au Point où le corps a commencé à tomber; c'eſt-à-dire que l'eſpace parcouru dans les deux premiers inſtans, eſt à l'eſpace parcouru dans le premier, comme le quarré de 2 eſt au quarré de 1, ou :: 4. 1.

[a] Voy. le Schol. 2. de la pag. 13. n°. 89. de la Mécanique de M. Volf.

Effectivement le corps étant ſuppoſé par courir 1 toiſe dans le premier inſtant, & 3 dans le ſecond, ſuivant la loi de la nature (96), il aura parcouru en tout 4 toiſes à la fin du ſecond inſtant. Ainſi l'eſpace parcouru dans les deux premiers inſtans ſera à l'eſpace parcouru dans le premier :: 4. 1. mais 4 eſt le quarré de 2, & 1 eſt auſſi le quarré de 1. Il eſt donc clair que, dans la ſuppoſition de la loi énoncée ci-deſſus (96), *les eſpaces parcourus ſont entr'eux, comme les quarrés des tems employés à les parcourir.* Obſervation très-eſſentielle pour la ſuite.

Voulez-vous, pour porter la conviction plus loin, comparer l'eſpace parcouru en 2 inſtans, à celui qui l'aura été en 3? Vous trouverez qu'à la fin des deux premiers inſtans, il aura parcouru 4, ou 1 + 3, & à la fin des 3 inſtans il aura parcouru 9, ou 1 + 3 + 5; enſorte que l'eſpace des deux premiers inſtans eſt à l'eſpace des 3 inſtans :: 4. 9. Or 4 eſt le quarré de 2, & 9 celui de 3. Cette ſeconde loi n'eſt donc pas moins conſtante que la première; & vous allez voir qu'elle eſt très-commode, pour découvrir de quelle hauteur un corps eſt tombé, quand on connoît le tems qu'il a employé à tomber par la ſeule action de ſa peſanteur; ou combien de tems un corps ſera à parcourir une hauteur donnée, en vertu de ſa ſeule peſanteur.

98. Nous ſuppoſerons ici, comme dans toute la ſuite, que le corps dans ſa chute n'éprouve aucun obſtacle, ſoit de la part de l'air, ſoit de toute autre cauſe quelconque; en un mot, comme ſi ſon mouvement s'éxécutoit dans un vuide parfait; prenant ainſi les choſes dans la pureté Mathématique, afin d'avoir des principes fixes; mais nous réſervant à éxaminer par l'expérience, juſqu'à quel point la réſiſtance de l'air peut altérer les réſultats de cette hypothèſe. Nous ſuppoſerons encore qu'un corps en tombant, parcoure 15 pieds dans la première ſeconde de ſa chute, comme on l'a déterminé à peu près par l'expérience.

99. PROBL. Un corps a été 4 minutes à tomber par la ſeule action de ſa peſanteur. On demande de quelle hauteur il eſt deſcendu, ou la longueur x de l'eſpace qu'il a parcouru pendant ce tems?

RÉSOL. Rappellez-vous que l'eſpace x doit être à l'eſpace 15, comme le quarré 16 du tems 4, eſt au quarré 1 du tems 1, ou que $x. 15 :: 16. 1.$ (97). Ainſi $x = 15 \times 16. = 240.$ Ce qui démontre qu'en 4 ſecondes le corps eſt deſcendu de 240 pieds.

100. PROB. Voulez-vous ſçavoir préſentement, combien de tems un corps ſera à tomber de la hauteur de 540 pieds?

RÉSOL. Dites, l'eſpace 15 parcouru en une ſeconde, eſt à l'eſpace propoſé 540, comme le quarré de 1 eſt au quarré yy du tems cherché, ou $15. 540 :: 1. yy = \frac{540}{15} =$ $36.$ Donc le tems cherché $y = \sqrt[2]{36} = 6.$ Un corps employera donc 6 ſecondes à tomber de la hauteur de 540 pieds.

101. COROL. II. Comme on ſuppoſe la peſanteur conſtante, c'eſt-à-dire qu'à chaque inſtant elle donne au corps qui tombe une nouvelle impulſion, égale à chacune des impulſions reçûes dans chaque inſtant précédent; qu'une impulſion égale produit dans un même-tems une vîteſſe égale, & que toutes ces impulſions conſpirent du même côté, ſans ſe détruire aucunement, il eſt évident que dans un tems donné, le corps reçoit autant d'impulſions ou de vîteſſes égales, que l'on y peut compter d'inſtans égaux. *Les vîteſſes acquiſes ſont donc comme les tems employés à parcourir des eſpaces :* Mais les eſpaces parcourus ſont entr'eux comme les quarrés des tems (97); par conſéquent, les tems étant entr'eux comme les vîteſſes, *les eſpaces ſeront comme les quarrés des vîteſſes acquiſes à la fin de ces eſpaces.* Donc *les vîteſſes acquiſes ſeront entr'elles, comme les Racines quarrées des eſpaces.*

Soient T, t les tems; V, u les vîteſſes; E, e les eſpaces que l'on compare. On aura $T. t :: V. u$ (101); ou $TT. tt :: VV. uu.$ Or $E. e :: TT. tt$ (97); donc $E. e :: VV. uu$; ainſi $T. t :: \sqrt{E}. \sqrt{e}$; ou $V. u :: \sqrt{E}. \sqrt{e}.$ On doit faire attention à toutes ces loix.

102. COROL. III. *Un corps mû uniformément* [a] *avec la vîteſſe acquiſe à la fin du premier inſtant de ſa chute, parcourt dans un tems égal au premier, un eſpace double du premier.* Car, la peſanteur étant ſuppoſée conſtante, pouſſe toujours le corps également; elle lui fait donc parcourir 1 dans le ſecond tems, comme elle a fait dans le premier: mais, puiſque dans ce ſecond tems le corps en a parcouru 3, il eſt néceſſaire qu'en vertu de la vîteſſe acquiſe à la fin du premier inſtant, il ait parcouru 2, double de 1, premier eſpace parcouru. Or cette vîteſſe acquiſe eſt uniforme, puiſqu'elle n'eſt altérée par aucune cauſe. La progreſſion Arithmétique 1, 3, 5, 7, 9, &c. que ſuivent les eſpaces parcourus par un corps, dans les inſtans ſucceſſifs de ſa chute, démontre donc que *ce corps mû uniformément avec la vîteſſe acquiſe à la fin du premier inſtant de ſa chute, parcourt dans un tems égal au premier, un eſpace double de l'eſpace parcouru dans le premier tems.* Ce qu'il eſt très-important de bien remarquer.

Et pour n'avoir aucun doute que cela arrive invariablement, prenez l'eſpace 4 parcouru en 2 inſtans; je dis qu'avec la vîteſſe acquiſe à la fin de ces deux premiers inſtans, le corps aura véritablement parcouru 8, double de 4, dans les deux inſtans ſuivans. Car dans ces deux inſtans il parcourera $5+7=12$. Or on ſuppoſe que la peſanteur lui en fait parcourir 4 dans les deux premiers inſtans; donc, puiſqu'elle eſt conſtante, elle lui en fera auſſi parcourir 4, dans les deux inſtans ſuivans égaux aux deux premiers; il en reſtera donc 8 parcourus par la vîteſſe acquiſe; laquelle ne peut pas manquer d'être toujours uniforme; vû que rien ne l'empêche d'être la même.

103. COROL. IV. Un corps repouſſé en haut perpendiculairement à l'horiſon, avec la vîteſſe acquiſe à la fin de ſa chute, doit néceſſairement, dans un tems égal à celui

[a] Le Mouvement *uniforme* eſt celui par lequel un corps parcourt des eſpaces égaux, en tems égaux.

de ſa chute, remonter au même Point d'où il a commencé à deſcendre (fig. 21.).

DÉM. Suppoſons qu'en 3 tems égaux, le corps ſoit deſcendu de A en B; qu'il ait parcouru 1 dans le premier tems, & par conſéquent 3 dans le ſecond, & 5 dans le troiſiéme; de manière que AB ſoit en tout de 9 parties égales. Les tems étant entr'eux comme les degrés de vîteſſe (101), le mobile aura acquis, à la fin de ſa chute, 3 degrés égaux de vîteſſe; il commencera donc à remonter avec ces 3 degrés; mais en vertu du degré acquis pendant le premier inſtant de ſa chute, il a parcouru 2 (102); donc, en vertu des 3 degrés égaux acquis à la fin, il en parcourera $6 = 3$ fois 2. Ainſi le mobile, en poſſeſſion de ces 3 degrés de vîteſſe, parcoureroit d'un mouvement uniforme 6 parties de AB, dans le premier tems de ſon aſcenſion, ou remonteroit de B juſqu'en 3, ſi la peſanteur s'oppoſant à ſon action dans un ſens directement contraire, ne le faiſoit pas reculer de 1; il ne parviendra donc que juſqu'en 4, après avoir décrit 5 parties de AB. Dans le ſecond tems de ſon aſcenſion, il décriroit auſſi d'un mouvement uniforme 6 parties de AB; mais la peſanteur le faiſant reculer de 3 dans ce ſecond tems, il n'ira au-delà du Point 4, que de trois parties de AB. Donc, à la fin des deux premiers tems de ſon aſcenſion, il ſera remonté juſqu'en 1; & il continueroit, dans le troiſiéme tems, de faire uniformément 6 parties de AB, ſi la peſanteur le repouſſant de 5, ne le réduiſoit pas à n'avoir décrit que 1 partie de AB. De manière donc qu'à la fin des 3 tems, il ſera revenu préciſément au Point A, d'où il avoit commencé à deſcendre. Et il ne paſſera pas ce Point de partance.

Car, ſi on vouloit qu'il continuât dans un quatriéme tems à faire d'un mouvement uniforme 6 parties de AB, en remontant au-deſſus du Point A; comme il ſeroit repouſſé de 7 parties dans ce même quatriéme tems, il ſe trouveroit à la fin de cet inſtant au Point 1, au-deſſous de A. On voit par-là qu'il redeſcendroit, & que par

conſéquent *un corps repouſſé, perpendiculairement à l'horiſon, avec la viteſſe acquiſe à la fin de ſa chute, remontera, dans un tems égal à celui de ſa deſcente, préciſément à la meme hauteur, d'où il a commencé à ſe mouvoir*, ſans qu'il lui ſoit poſſible d'aller au-delà.

Si l'on avoit de la peine à concevoir qu'un corps mû uniformément en haut, fût repouſſé ſuivant la même loi, avec laquelle il accélère ſon mouvement en deſcendant, il n'y auroit qu'à l'imaginer roulant ſur un plan, oblique à l'horiſon, lequel plan ſeroit mû uniformément dans un ſens directement oppoſé à la chute du corps; & l'on verroit évidemment que, tandis que le plan entraîneroit le corps de 6 parties au-deſſus de l'horiſon, dans le premier inſtant, la peſanteur le feroit redeſcendre en roulant, de 1 partie pendant ce même tems; d'où il eſt clair que tout le reſte s'enſuit.

104. Rem. La théorie du *jet des bombes* ſe déduit uniquement, des loix de ce mouvement accéléré des corps peſans, combinées avec celles du mouvement uniforme, où l'on ſuppoſe qu'une impreſſion donnée à un corps mis en mouvement, continue d'être la même dans les inſtans ſuivans, tandis que rien ne s'y oppoſe, & lui fait parcourir des eſpaces égaux en tems égaux; comme cela arriveroit néceſſairement dans un vuide parfait. Il faut donc, avant de paſſer aux Propoſitions ſuivantes, ſe rendre ces loix bien familières, & tâcher qu'il ne reſte aucun nuage.

105. Propos. I. Quand un corps eſt pouſſé uniformément le long d'une Ligne AC (fig. 22.), parallèle à l'horiſon BT; qu'il décrit, par exemple, en 2 ſecondes, tandis que ſa peſanteur le fait deſcendre de la hauteur AB; je dis qu'en vertu de la compoſition de ces deux mouvemens, l'un uniforme & l'autre accéléré, il arrivera à la fin de ce tems au Point D, après avoir tracé la Parabole AMD, laquelle a pour *Axe* la hauteur AB; les Lignes GM, BD, pour deux de ſes *Ordonnées*; pour *Paramètre p* le quadruple d'une Ligne troiſiéme proportionelle aux deux grandeurs AB, & AF moitié de AC; & enfin AC pour *Tangente*.

DÉM. 1°. Le chemin AMD du mobile eſt une *Parabole*. Car, les eſpaces parcourus par la peſanteur étant entr'eux comme les quarrés des tems employés à les parcourir, l'eſpace FM ou AG parcouru en vertu de la peſanteur à la fin de 1 ſeconde, (durant laquelle le mobile aura décrit uniformément AF ou GM moitié de AC) ſera à l'eſpace CD ou AB, parcouru en vertu de la peſanteur à la fin des 2 ſecondes, (pendant leſquelles il aura décrit uniformément AC ou BD (ſupp.)) comme le quarré de 1 eſt au quarré de 2; c'eſt-à-dire que FM ou AG. CD ou AB :: 1. 4; or AF étant moitié de AC, GM = AF eſt moitié de BD = AC; ainſi BD = 2 GM; donc $\overline{BD}^2 = 4\,\overline{GM}^2$; donc $\overline{GM}^2 . \overline{BD}^2$ :: 1. 4. mais nous venons de voir que AG. AB :: 1. 4. Par conſéquent $\overline{GM}^2 . \overline{BD}^2$ :: AG. AB. Les quarrés des Ordonnées GM, BD, ſont donc entr'eux, comme les Abciſſes AG, AB correſpondantes; ce qui démontre que le chemin AHD eſt une *Parabole* (7).

2°. AB en eſt évidemment l'Axe, puiſque les Ordonnées GM, BD, lui ſont perpendiculaires (5).

3°. En tirant BF, & élevant ſur cette Ligne une perpendiculaire FH, menée juſqu'à ce qu'elle rencontre, en quelque Point H, le prolongement de BA vers H, on aura AH troiſiéme proportionelle aux Lignes AB, AF (291 *Inſtit. T.* 2.); & dont je dis que le quadruple ſera le *Paramètre* de la Courbe AMD; c'eſt-à-dire que 4 AH = *p*. Car remarquez que $\overline{AF}^2 = AH \times AB$, puiſque (ſupp.) AB. AF :: AF. AH. Ainſi $4\,\overline{AF}^2 = 4\,AH \times AB$; mais BD = 2 AF, & $\overline{BD}^2 = 4\,\overline{AF}^2$; donc $\overline{BD}^2 = 4\,AH \times AB$; mais l'on ſçait d'ailleurs (20) que $\overline{BD}^2 = AB \times p$. Donc $AB \times p = 4\,AH \times AB$; & Par conſéquent $p = 4\,AH$. C. Q. F. D.

4°. Le mobile étant détourné, par la peſanteur, de ſa direction AC, dès qu'il s'eſt avancé du Point A vers CD, on voit que la demi-Parabole AMD n'a que le Point A de commun avec la Ligne AC; & que ce ſeroit préciſément la

même choſe, ſi le corps, après avoir été porté de A vers la droite, étoit pouſſé du même Point A vers la gauche ſur le prolongement de CA, pour décrire l'autre moitié de la Parabole. Par conſéquent la Ligne AC, ne rencontrant la Parabole entière qu'en un ſeul Point, eſt néceſſairement Tangente à cette Courbe.

106. PROPOS. II. Suppoſons préſentement que le même corps décrive uniformément BF, oblique à l'horiſon BT, dans le même tems qu'il a parcouru AF, c'eſt-à-dire dans 1 ſeconde; & il arrivera que l'action de la peſanteur, combinée avec celle de l'impulſion uniforme ſuivant BF, fera décrire au mobile en 4 ſecondes, la Parabole entière BMCNT, tout-à-fait égale à la Parabole dont AMD, eſt une moitié.

DÉM. A la fin de la première ſeconde le mobile ſeroit arrivé en F, ſi la peſanteur ne l'avoit pas fait deſcendre de la hauteur FM, quatriéme partie de AB, comme au n°. 105. ainſi le Point M ſera à la nouvelle Courbe. Le corps continuant à ſe mouvoir uniformément dans la même direction, auroit parcouru FR = BF, à la fin de la 2me. ſeconde, & ſeroit parvenu en R, ſans la peſanteur qui l'a fait deſcendre alors de la longueur AB = 4 AG = 4 FM (ſupp.): or AB = RC, puiſque AF = FC; ainſi à la fin des 2 premières ſecondes, le mobile ſera deſcendu de la longueur RC = 4 FM, & le Point C ſera à la Courbe du *Jet*. J'ajoute qu'il en ſera le *Sommet*, puiſque le mobile ayant parcouru uniformément RK dans la troiſiéme ſeconde, ſeroit parvenu en K à la fin de 3 ſecondes, ſi la peſanteur ne l'avoit pas fait alors deſcendre de 9 FM (97), c'eſt-à-dire, de KN = 9 FM; le Point N de la nouvelle Parabole ſe trouvera donc au-deſſous de AP; car KV étant double de RC (à cauſe de FK double de FR), & RC = AB quadruple de FM ou de AG, la Ligne KV ſera octuple de FM ou = 8 FM; mais KN = 9 FM = 8 FM + FM; ainſi KN > KV, & VN = FM: le mobile ſera donc deſcendu alors au-deſſous de AP, & C ſera le plus haut Point de ſon aſcenſion, ou le Sommet de la Courbe BCT. Dans la

quatriéme ſeconde il auroit parcouru, en vertu de ſon mouvement uniforme, KS = BF, & ſeroit arrivé à la fin de 4 ſecondes en S; mais la peſanteur l'ayant fait deſcendre alors de 16 FM (97), il ſera préciſément arrivé au Point T de l'horiſon, qui déterminera par conſéquent toute l'étendue du Jet. Étant évident que ST = SP + PT = 16 FM; puiſque SP égalant 3 RC (à cauſe de FS = 3 FR) & RC égalant 4 FM, on a SP = 12 FM; d'ailleurs PT = AB = 4 AG = 4 FM; donc SP + PT = 16 FM, ou ST = 16 FM, ou 4 AB. Par conſéquent, à la fin des 4 ſecondes, le mobile ſera préciſément retombé ſur l'horiſon, & le chemin CNT qu'il aura parcouru en deſcendant pendant 2 ſecondes, ſera égal au chemin BMC décrit auſſi en 2 ſecondes qu'il a employées à monter; étant clair, par la figure, que le chemin BMCNT eſt une Parabole. Car $\overline{ME}$ = $\overline{GM}$; CE = AG; CD = AB. Donc, puiſque $\overline{GM}^2$. $\overline{BD}^2$ :: AG. AB (105), on aura $\overline{ME}^2$. $\overline{BD}^2$ :: CE. CD; la Courbe BMC eſt donc une demi-Parabole (7).

On prouvera de même, que la Courbe CNT eſt une autre moitié de Parabole égale à la demi-Parabole BMC, laquelle ne diffère en rien de AMD; ces deux Courbes ayant une égale hauteur, & des Ordonnées égales, à des Points également éloignés de leur Sommet: par conſéquent la Parabole entière BMCNT eſt tout-à-fait égale à la Parabole, dont AMD eſt une moitié.

107. PROBL. Mais de quelle hauteur doit tomber le mobile, pour avoir à la fin de ſa chute une force, qui lui faſſe parcourir uniformément BR double de BF, dans le même-tems que ſa peſanteur lui fait parcourir AB, c'eſt-à-dire, en 2 ſecondes? (fig. 22.).

RÉSOL. Cherchez une troiſiéme proportionelle aux deux grandeurs AB, BF; c'eſt-à-dire, élevez au Point F ſur P la Perpendiculaire FH, juſqu'à ce qu'elle rencontre en quelque Point H, le prolongement de BA vers H; & la longueur HB ſera la hauteur, dont le mobile doit deſcendre, pour acquérir à la fin de ſa chute une force, qui le mette en

en état de parcourir uniformément BR en 2 ſecondes, c'eſt-à-dire, dans le tems qu'il ſera à parcourir AB par ſa peſanteur.

DÉM. Suppoſons donc que le mobile ſoit tombé de la hauteur HB, & voyons quelle longueur il doit parcourir d'un mouvement uniforme pendant 2 ſecondes, en conſéquence de la vîteſſe acquiſe à la fin de HB. Les eſpaces parcourus, en vertu de la peſanteur, étant entr'eux comme les quarrés des tems employés à les parcourir (97), ſi nous appellons t le tems que le mobile employera à deſcendre le long de HB, nous aurons AB. HB :: 4. $tt = \frac{4\,HB}{AB}$.

Donc $t = 2\sqrt{\frac{HB}{AB}}$ (21. Calc.) eſt l'expreſſion du tems, que le mobile a employé à parcourir HB, en vertu de la peſanteur; & cette expreſſion de t eſt en grandeurs connues. Soit donc x la quantité, par laquelle il faut multiplier t, afin qu'il ſoit = 2 ſecondes, on aura $tx = 2$; donc $x = \frac{2}{t} = \frac{2}{2\sqrt{\frac{HB}{AB}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{HB}{AB}}}$. Mais $\frac{HB}{AB} = \frac{\overrightarrow{HB}^2}{\overrightarrow{BF}^2}$. Car HB. BF :: BF. AB (conſt.); donc $\overrightarrow{HB}^2$. $\overrightarrow{BF}^2$ :: HB. AB (256. *Inſt. T.* 2.); ainſi $\frac{\overrightarrow{HB}^2}{\overrightarrow{BF}^2} = \frac{HB}{AB}$. Donc, puiſque $x = \frac{1}{\sqrt{\frac{HB}{AB}}}$, on aura $x = \frac{1}{\sqrt{\frac{\overrightarrow{HB}^2}{\overrightarrow{BF}^2}}} = \frac{1}{\frac{HB}{BF}} = \frac{BF}{HB}$, (37. Arithm. *Inſt. T.* 1.) donc $x = \frac{BF}{HB}$. Or, avec la vîteſſe acquiſe à la fin du tems t, le mobile doit parcourir uniformément, pendant un tems égal à t, un eſpace double de HB, c'eſt-à-dire 2 HB; ainſi pendant $t \times x$ ou pendant 2 ſecondes, il parcourera uniformément $2\,HB \times x = 2\,HB \times \frac{BF}{HB}$, (puiſque $x = \frac{BF}{HB}$); or $2\,HB \times \frac{BF}{HB} = 2\,BF = BR$; par conſéquent le mobile parcourera uniformément, en vertu de la vîteſſe acquiſe le long de HB, l'eſpace BR en 2 ſecondes, qui eſt

le même tems que le corps a mis à tomber de A en B. C. Q. F. D.

Nous appellerons dans la ſuite BH la *Ligne de hauteur.*

108. Si l'on eſt curieux de ſçavoir, comment l'on eſt parvenu à trouver que la hauteur HB, troiſiéme proportionelle au deux Lignes AB, BF, étoit propre à réſoudre cette queſtion. Soit y la hauteur cherchée; V la vîteſſe acquiſe à la fin de cette hauteur; u la vîteſſe acquiſe à la fin de AB; & que l'on ſe rappelle que les vîteſſes acquiſes en tombant, ſont entr'elles comme les Racines quarrées des eſpaces parcourus (101); ce qui donne $V. u :: \sqrt{y}. \sqrt{AB}$; mais (ſupp.) en vertu de la vîteſſe V acquiſe à la fin de l'eſpace y, le mobile doit parcourir uniformément BR = 2 BF en 2 ſecondes; & la vîteſſe u acquiſe à la fin de l'eſpace AB, doit faire parcourir au mobile, avec un mouvement uniforme, un eſpace double de AB en 2 ſecondes (102); or, dans le mouvement uniforme, quand les tems ſont égaux, les vîteſſes ſont entr'elles comme les eſpaces parcourus [a]; donc $V. u :: 2\,BF. 2\,AB :: BF. AB$. Ainſi $\sqrt{y}. \sqrt{AB} :: BF. AB$. Donc, en quarrant tous les termes, $y. AB :: \overline{BF}^2. \overline{AB}^2$ (254. *Inſt. T.* 2.) d'où l'on tire $y = \frac{\overline{BF}^2}{AB}$, ou $AB. BF :: BF. y$. Ce qui démontre que la hauteur cherchée y, eſt une troiſiéme proportionelle aux deux Lignes AB, BF; ainſi qu'on l'a ſuppoſé (107) pour la Réſolution de ce Problême, & que la vérité en a été reconnue par la Démonſtration, dont il eſt ſuivi.

109. COROL. Il eſt clair 1°. que les Lignes BS, AP, ſont Tangentes de la Parabole BMCNT; 2°. que AH eſt le quart du Paramètre de l'Axe CD de cette Courbe, ainſi qu'il l'eſt de ſon égale AMD (105); 3°. que l'indéfinie HO, Perpendiculaire à HB, en eſt la *Directrice* (90); 4°. que

[a] Etant évident que, ſi deux eſpaces différens ont été parcourus dans le même tems, il a fallu employer, pour le plus grand, d'autant plus de vîteſſe qu'il ſurpaſſe le petit.

ST = 4 FQ = 4 AB, puiſque BS = 4 BF; 5°. que l'*Amplitude* BT, ou la plus grande étendue de la Parabole, = 4 AF ou 4 BQ; 6°. que ſa plus grande élévation CD = AB; & 7°. qu'enfin la *Ligne de hauteur* HB eſt égale à la plus grande élévation ou à l'Axe CD = AB de la Parabole, en y ajoutant le quart AH de ſon Paramètre.

110. Au lieu de la direction BS (fig. 23.), prenons une autre direction quelconque B*r*, renfermée dans l'Angle droit HBT, & faiſant avec l'horiſon B*t* l'Angle *r*B*t*. Supposons toujours que le mobile, ſoit pouſſé d'un mouvement uniforme ſuivant la direction B*r*, avec la vîteſſe acquiſe en tombant de H en B, c'eſt-à-dire, avec la même vîteſſe qui lui a fait décrire la Parabole BCT en 4 ſecondes, étant pouſſé dans la direction BS; & voyons quelle partie de B*r* le mobile auroit parcourue uniformément, à l'inſtant que la peſanteur le ramènera à l'horiſon.

111. PROPOS. III. Si l'on décrit un demi-Cercle ſur la Ligne de hauteur HB, je dis que le mobile, pouſſé d'un mouvement uniforme ſuivant la direction B*r*, auroit préciſément parcouru 4 B*b* = B*r*, à l'inſtant qu'il retombera au Point *t* de l'horiſon.

DÉM. Nous allons d'abord chercher le tems, que le mobile doit employer à parcourir uniformément 4 B*b* ou B*r*. Après quoi nous examinerons ſi, en vertu de ſa peſanteur, il a dû regagner l'horiſon préciſément à la fin de ce tems.

Dans le mouvement uniforme, quand les vîteſſes ſont égales, les eſpaces parcourus ſont entr'eux comme les tems employés à les parcourir [*a*]; ainſi 4 BF ou BS. 4 B*b* ou B*r* :: 4 ſecondes (employées à parcourir BS) ſont à un quatriéme terme T, qui ſera le tems que le mobile aura mis à décrire uniformément B*r*. Or, puiſque 4 BF. 4 B*b* :: 4. T, on aura $T = \frac{4\,B\,b}{B\,F}$ pour l'expreſſion du tems, pendant lequel la longueur 4 B*b* ou B*r* aura été parcourue.

[*a*] Car, ſi l'on va toujours d'un pas égal, on fera d'autant plus de chemin, que l'on y employera plus de tems.

Appellons maintenant z l'espace que le mobile aura fait, en tombant pendant le tems $\frac{4Bh}{BF}$; nous sçavons d'ailleurs (106) que l'espace ST, qu'il a fait en tombant pendant 4 secondes, est égal à 4 AB : mais les espaces parcourus en tombant, sont entr'eux comme les quarrés des tems employés à les parcourir (97); on aura donc $z. 4AB :: \frac{16\overline{Bh}^2}{\overline{BF}^2}. 16$; donc $z = \frac{4 \times AB \times \overline{Bh}^2}{\overline{BF}^2}$ (M). Or, en tirant les Lignes bH, FH, il est clair que $\overline{Bh}^2 = BH \times aB$ (292. *Inst. T.* 2.), & pareillement que $\overline{BF}^2 = BH \times AB$; donc, en substituant ces valeurs de $\overline{Bh}^2$ & de $\overline{BF}^2$ dans l'équation M, elle deviendra $z = \frac{4 \times AB \times BH \times aB}{BH \times AB} = 4aB = 4bl$, en supposant la Perpendiculaire bl; mais $rt = 4bl$, puisque $Br = 4bh$, donc $z = rt$; c'est-à-dire, que le mobile aura parcouru rt, en vertu de sa pesanteur, ou sera retombé à l'horison, à l'instant précisément qu'il auroit achevé de parcourir Br ou $4Bh$ d'un mouvement uniforme, avec la vîtesse acquise en tombant de H en B. C. Q. F. D.

112. REM. Je ne m'arrête point à démontrer que, dans l'hypothèse présente, le mobile ne pourroit être descendu à l'horison, avant d'être arrivé en r; & qu'au-delà de ce Point il seroit tombé au-dessous de l'horison; parce que cela me paroît tout-à-fait évident, ou au moins, très-aisé à déduire des principes établis, en suivant pied à pied les traces de la dernière démonstration.

113. COROL. I. L'étendue du jet suivant la direction Br, ou ce qui est la même chose, l'*amplitude* de la nouvelle Parabole est donc déterminée par l'horisontale Bt; ainsi que l'amplitude de la Parabole BCT, décrite par le mobile suivant la direction BS, est déterminée par la longueur BT. Par conséquent, Br étant Tangente de la nouvelle Parabole, si l'on élève au Point e, milieu de Bt, la Perpendiculaire ex, elle sera la sous-Tangente (28), & par-là double de l'Abciſſe qui lui répond (29). Or Bx étant double de Bh, ex sera double de bl ou de aB; mais $aB = xd$ (puis-

que $Bb = hx$), donc $ex = 2xd = xd + de$. Ainſi $de = xd$; donc ex double de xd ſera double de de; la Ligne de ſera donc l'Abciſſe; le Point d le Sommet de la Parabole Bdt, laquelle ne s'élève pas au-deſſus de la parallèle ag à l'horiſon, tirée par le Point b; & aB ou de la plus grande élévation de ce jet.

114. COROL. II. On verra avec la même facilité, que cette plus grande élévation aB ou de eſt le quart de rt. Car $aB = bl$; or $bl = \frac{rt}{4}$, puiſque $Bb = \frac{Br}{4}$; donc aB ou de eſt le quart de rt.

115. COROL. III. On s'appercevra de même que l'amplitude $Bt = 4\,ab$ ou $4\,Bl$; à cauſe que Br égalant $4\,Bb$, Bt égalera $4\,Bl$ ou $4\,ab$.

116. COROL. IV. Il eſt clair encore que aH eſt le quart du Paramètre p de l'Axe de de la Parabole Bdt. Car $\overline{Be}^2 = de \times p$; (n°. 20.) or $Be = ad = 2\,ab$; donc $\overline{Be}^2 = 4\,\overline{ab}^2$; donc $de \times p = 4\,\overline{ab}^2$; mais $\overline{ab}^2 = aH \times aB$ (291. *Inſt. T.* 2.); donc $4\,\overline{ab}^2 = 4\,aH \times aB = 4\,aH \times de$; ainſi $de \times p = 4\,aH \times de$; donc $4\,aH = p$, ou $aH = \frac{p}{4}$.

117. COROL. V. La Perpendiculaire indéfinie HO à la Ligne de hauteur HB eſt donc la Directrice de la Parabole Bdt (90), ainſi qu'elle l'eſt de la Parabole BCT (109).

118. COROL. VI. On voit enfin que la Ligne de hauteur HB eſt égale à la ſomme de l'Axe $de = aB$ de la Parabole Bdt, & du quart aH de ſon Paramètre.

De ſorte que les Lignes, que nous venons de conſidérer par rapport à la Parabole Bdt, ſont reſpectivement les mêmes que celles dont nous avons fait uſage lorſqu'il s'eſt agi de la Parabole BCT. Ce qui arrivera de même dans tous les autres *jets*, ſuivant une direction quelconque entre HB & Br; pourvû qu'ils ſe faſſent toujours avec la même force.

119. REM. On dit que l'*étendue d'un jet*, ou l'*amplitude* d'une Parabole eſt au niveau de la *Batterie* [*a*], quand le

[*a*] Une Batterie eſt un endroit préparé, & communément à couvert d'un Pa-

Point où le mobile tombe, eſt dans la même Ligne horiſontale que le Point d'où part ce mobile; tels ſont les Points T, *t*, de l'horiſontale B*t*, par rapport au Point de partance B. On appelle auſſi *Angle d'élévation* un Angle quelconque S*Bt*, ou *rBt*, formé par l'horiſontale B*t* & par une Ligne de *jet*, ſuivant une direction quelconque BS ou B*r*, élevée obliquement à l'horiſon.

120. PROPOS. IV. *très-eſſentielle.* Les étendues de différens jets au niveau d'une Batterie, ou ce qui eſt la même choſe, les amplitudes B*t*, BT des Paraboles B*dt*, BCT, décrites par un mobile, chaſſé avec une même force, ſuivant les directions B*r*, BS, obliques à l'horiſon, ſont entr'elles comme les Sinus du double des Angles d'élévation *r*B*t*, SB*t*.

DÉM. Du centre E tirez les rayons E*h*, EF; & remarquez que l'Angle *h*EB au centre, a pour meſure l'arc entier B*h*, & que l'Angle d'élévation *r*B*t* n'eſt meſuré que par la moitié de ce même Arc (105. *Inſt. T.* 1.), étant formé par la corde B*h* & la Tangente B*t* du demi-Cercle. Pareillement, que l'Angle BEF eſt double de l'Angle d'élévation SB*t*, le premier ayant pour meſure l'Arc entier BF, & l'autre ſeulement la moitié de ce même Arc. Or *ah* eſt le Sinus de l'Angle *h*EB (445. *Inſt. T.* 2.); donc 4*ah* eſt le Sinus du double de l'Angle d'élévation *r*B*t*. De même AF étant le Sinus de l'Angle BEF, eſt le Sinus du double de l'Angle d'élévation SB*t*. La Démonſtration ſe réduit donc à faire voir que B*t*. BT :: *ah*. AF; ce qui eſt très-ſimple, car on a vû (115) que B*t* = 4 *ah*, & BT = 4 AF (art. 5. du n°. 109.). Ainſi B*t*. BT :: 4 *ah*. 4 AF :: *ah*. AF, C. Q. F. D.

121. COROL. I. D'où il ſuit que le plus grand de tous les jets, ou la plus grande des amplitudes des Paraboles, décrites par un même corps, pouſſé avec une même force ſuivant différens degrés d'élévation, eſt celle où le mobile eſt chaſſé à l'élévation de 45^{d}; ce qui s'appelle *tirer à*

---

rapet, d'où l'on tire du Canon ou des Mortiers, pour battre l'ennemi ou une Place attaquée.

haute volée. Car nous venons de voir que ces amplitudes, ſont toujours égales aux quadruples des Sinus du double de leurs Angles d'élévation ; mais le Sinus du double de 45^d, ou le Sinus de 90^d étant le Sinus total, eſt le plus grand de tous les Sinus ; donc ſon quadruple eſt la plus grande amplitude. Ce qui eſt conforme à l'expérience.

Cela eſt même viſible à l'inſpection de la fig. 24, dans laquelle l'amplitude correſpondante à l'Angle d'élévation *b*BT de 45^d eſt égale à 4 E*b* ; & celles qui répondent à des Angles MBT au-deſſus, ou FBT au-deſſous de 45^d, valent 4 LM ou 4 AF ; mais, comme E*b* eſt viſiblement plus grande qu'aucune autre Ordonnée LM ou AF, priſe au-deſſus ou au-deſſous du centre E, il n'y a rien de plus manifeſte que 4 E*b* eſt une étendue plus grande que 4 LM ou 4 AF. Et l'on voit en même-tems, que la plus grande portée ou amplitude 4 E*b*, eſt double de la Ligne de hauteur HB, laquelle vaut toujours 2 E*b*.

122. Coroll. II. Les amplitudes ſont égales, quand le mobile eſt jetté, toujours avec la même force, ſous des Angles d'élévation également éloignés de 45^d ; puiſque, dans ce cas, les Sinus étant égaux, leurs quadruples qui déterminent les amplitudes, ſont auſſi égaux. Soit (fig. 24.) l'Angle FBT de 30^d, & l'Angle MBT de 60^d, leſquels ſont également éloignés de 45^d, le premier ayant 15^d au-deſſous, & le ſecond 15^d au-deſſus de 45. Je dis qu'alors les amplitudes ſont égales ; la première étant déterminée par le quadruple du Sinus de 60^d double de 30, & la ſeconde par le quadruple du Sinus de 120^d double de 60 : mais le Sinus de 120 eſt préciſément le même que celui de 60 ; puiſque, pour avoir le Sinus de 120^d, il faut prendre celui de ſon complément à deux Angles droits (448. *Inſt. T.* 2.), lequel eſt de 60^d. Les Sinus étant donc égaux, c'eſt une néceſſité que leurs quadruples le ſoient auſſi, & que par conſéquent les amplitudes ſoient égales. Ce qui eſt encore confirmé par l'expérience.

123. Coroll. III. Il n'eſt pourtant pas toujours indifférent dans la pratique, de prendre l'un de ces Angles pour

l'autre. Si l'on ſe propoſoit, par exemple, d'écraſer un édifice, on voit qu'il ſeroit convenable de ſe ſervir de l'Angle au-deſſus de 45^{d}, parce qu'alors la Bombe s'élevant juſqu'à la hauteur LB (113), qui eſt plus grande que AB hauteur du jet au-deſſous de 45^{d}, elle frapperoit avec beaucoup plus de force, ſa vîteſſe étant augmentée en tombant de plus haut. On devroit au contraire s'en tenir à l'Angle au-deſſous de 45^{d}, ſi l'on avoit en vûe d'incommoder ceux que l'on attaque par ce moyen : la Bombe s'élevant moins haut & paſſant alors par un chemin plus court, il eſt clair qu'elle donneroit moins de tems à l'ennemi, pour ſe mettre à couvert des éclats qu'elle lance de tous côtés, lorſqu'elle vient à crever [a].

124. COROL. IV. La portée ſous l'Angle de 15^{d} eſt égale à la moitié de la plus grande amplitude, ou à la moitié de l'amplitude de 45^{d} ; car l'amplitude de 15^{d} eſt à celle de 45^{d}, comme le Sinus de 30^{d} double de 15, eſt au Sinus de 90 double de 45 : mais le Sinus de 30^{d} eſt la moitié du Sinus total, ou du Sinus de 90^{d} (451, *Inſt. T.* 2.) ; par conſéquent l'amplitude ou la portée ſous l'Angle de 15^{d}, eſt la moitié de celle que l'on trouve ſous l'Angle de 45, c'eſt-à-dire (121) la moitié de la plus grande amplitude.

125. REM. Indépendamment de ce que ceci eſt fort commode pour avoir la plus grande portée, en meſurant ſimplement celle que l'on a moyennant 15^{d} d'élévation, M. *Bélidor* s'en eſt ſervi dans ſon *Bombardier François*, pour conſtruire une table des différentes portées d'une même Bombe, pouſſée avec une même force ſuivant différens degrés d'élévation. C'eſt un travail fort eſtimable, & je ne ſçaurois trop conſeiller d'y avoir recours. On y trouvera un bon nombre d'obſervations très-judicieuſes, qui peu-

[a] Une *Bombe* eſt un gros boulet creux, que l'on remplit de poudre, à laquelle communique une fuſée, qui doit conſerver ſon feu à peu près autant de tems que la Bombe eſt en l'air. On la chaſſe par le moyen d'un gros Canon court, appellé *Mortier* ; & lorſqu'elle eſt vers la fin de ſa chûte, la fuſée à laquelle on a mis le feu avant de tirer, enflâme la poudre renfermée dans la Bombe, qui crêve à l'inſtant & ſe met en éclats.

vent conſidérablement perfectioner la pratique du *jet des Bombes*. J'avertirai ſeulement que l'Auteur en ayant donné la théorie dans ſon *Cours de Mathématiques*, il a jugé à propos de la ſupprimer dans ſon *Bombardier François*; & qu'ainſi on ne pourra pas lire cet Ouvrage avec intelligence, à moins que l'on n'ait bien conçu tout ce que nous avons dit juſqu'ici.

126. COROL. V. Les portées croiſſent depuis l'horiſontale juſqu'à 45°; après quoi elles vont en diminuant, juſqu'à ce que l'Angle d'élévation ſoit égal à un Angle droit; auquel cas l'amplitude ſera nulle, & la Bombe retombera préciſément dans la bouche de ſon *Mortier*, ſi aucun accident ne s'y oppoſe. Ce qui eſt tout-à-fait évident par la figure.

127. COROL. VI. La Ligne de hauteur HB eſt toujours la moitié de la plus grande portée. Car la Ligne de hauteur BH = 2 E*b*, n'eſt évidemment que la moitié de 4 E*b* qui eſt la plus grande portée (121).

128. COROL. VII. Il eſt impoſſible que la Bombe monte plus haut que le Point H, c'eſt-à-dire, qu'elle parvienne à une hauteur verticale plus longue que la moitié de la plus grande portée, parce qu'un corps, repouſſé avec la force qu'il a acquiſe en tombant de H en B, ne peut tout au plus remonter qu'au Point H, d'où il a commencé à deſcendre pour acquérir cette force (103): c'eſt pourquoi tous les jets ou toutes les inclinaiſons de l'hypothèſe préſente, ſont renfermées dans le demi-Cercle HMB.

129. COROL. VIII. Je dirai ici, par anticipation, ne pouvant pas le dire ailleurs, que les Sommets de toutes les Paraboles, décrites par un mobile jetté avec une même force, ſuivant toutes les inclinaiſons ou directions poſſibles, ſe trouvent dans une ellipſe BCDGH, dont le grand Axe eſt égal à la plus grande portée 4 E*b*, & le petit eſt égal à la Ligne de hauteur HB = 2 E*b*, moitié de la plus grande portée (127); de manière que le grand Axe de cette ellipſe eſt double du petit.

DÉM. Reprenant la fig. 23; remarquez que le Sommet d

de la Parabole B*dx*, décrite ſous la direction B*b*, eſt éloigné de la Ligne de hauteur HB, d'une longueur *ad* = 2 *ah*; parce que dans les Triangles ſemblables *ah*B, *dhx*, B*h* étant = *hx*, il faut que *ah* = *hd*, & qu'ainſi *ad* = 2 *ah*. Pareillement que la Diſtance du Sommet C de la Parabole BCT, (décrite ſous la direction BF) à la Ligne de hauteur HB, vaut 2 AF = AC. Ainſi (fig. 24.) faiſant les prolongemens MG = LM; *b*D = E*b*; FC = AF; le Point G ſera le Sommet de la Parabole ſous l'inclinaiſon BM; D celui de la direction B*b*; C le Sommet de la direction BF, &c. Il faut donc démontrer que les Points G, D, C, & tous les autres déterminés d'une manière ſemblable, ſont à l'ellipſe propoſée. Or, puiſque MG = LM (conſt.), LG = 2 LM; donc $\overline{\text{LG}}^2$ = 4 $\overline{\text{LM}}^2$. De même $\overline{\text{ED}}^2$ = 4 $\overline{\text{E}b}^2$. Ainſi $\overline{\text{LG}}^2$. 4 $\overline{\text{LM}}^2$ :: $\overline{\text{ED}}^2$. 4 $\overline{\text{E}b}^2$, ou LG. LM :: $\overline{\text{ED}}^2$. $\overline{\text{E}b}^2$ (252. *Inſt. T.* 2.) : mais $\overline{\text{LM}}^2$ = HL × LB (289. *Inſt. T.* 2.); ainſi $\overline{\text{LG}}^2$. HL × LB :: $\overline{\text{ED}}^2$. $\overline{\text{E}b}^2$ :: 4 $\overline{\text{ED}}^2$ ou 4 $\overline{\text{HB}}^2$. 4 $\overline{\text{E}b}^2$; c'eſt-à-dire, que le quarré $\overline{\text{LG}}^2$ de l'Ordonnée LG, eſt au Rectangle HL × LB des Segmens HL, LB, faits par cette Ordonnée, comme le quarré 4 $\overline{\text{ED}}^2$ ou 4 $\overline{\text{HB}}^2$ de 2 ED ou 2 HB eſt au quarré 4 $\overline{\text{E}b}^2$ de 2 E*b* ou HB; mais c'eſt-là préciſément la propriété caractériſtique de l'ellipſe, qui auroit 2 ED ou 2 HB, c'eſt-à-dire, la plus grande portée 4 E*b* pour grand Axe, & 2 E*b* = HB pour le petit (n°. 12. de l'ellipſe); donc, &c.

130. COROL. IX. Enfin la Perpendiculaire HO eſt la *Directrice* commune de toutes les Paraboles décrites par un mobile jetté d'un Point B, ſelon toutes les inclinaiſons poſſibles à l'horiſon BT, avec la force acquiſe en tombant de H en B.

131. REM. Après avoir vû ce qui doit arriver à un corps, jetté ſuivant une Direction quelconque BS ou B* oblique à l'horiſon Bt (fig. 23.), avec une force acquiſe en tombant

de H en B; examinons quelle doit être la portée de ce même mobile, chaſſé avec la même force parallèlement à l'horiſon. On comprend bien qu'il ne s'agit dans tout ceci, que de l'étendue des *coups de volée*, c'eſt-à-dire, de l'étendue en ligne droite ſur le terrain, depuis l'endroit où le mobile commence à ſe mouvoir en l'air, juſqu'à celui préciſément où ſa peſanteur le ramène à Terre; n'y ayant point de règle, & n'étant pas poſſible d'en établir aucune ſur l'eſpace, qu'une bombe peut parcourir en roulant après être tombée, vû l'irrégularité du terrain, la variété & la multiplicité des obſtacles; d'autant plus qu'une bombe eſt preſque toujours deſtinée à ſe fracaſſer à l'inſtant de ſa chute à terre, quand on en veut à des hommes; ou à s'enfoncer, lorſqu'on ſe propoſe d'abattre, ou d'écraſer des édifices. Ainſi la portée d'une bombe, tirée dans le direction même de l'horiſon, ſeroit abſolument nulle; puiſqu'alors ſes Points de départ & de chute ſeroient le même Point. Nous n'avons donc qu'à rechercher quelle doit être l'amplitude d'un jet, qui ſe fait au-deſſus du niveau de la campagne, parallèlement à l'horiſon. Or l'on appelle *Portée de but en blanc*, celle qui réſulte de la direction du mobile, chaſſé parallèlement à l'horiſon.

132. PROP. V. La Portée *de but en blanc* d'un mobile placé en B (fig. 25.) au-deſſus de l'horiſon DS, & chaſſé dans une Direction BT parallèle à l'horiſon, avec une force acquiſe en tombant, par exemple, de H en B, eſt égale au double de la moyenne proportionelle géométrique BM entre la Ligne de hauteur HB, ou ce qui eſt la même choſe, entre la moitié de ſa plus grande Portée (127) & ſa diſtance BD de l'horiſon.

Ainſi, en décrivant un demi-cercle ſur le Diamètre HD, & portant le double de BM (moyenne proport. géomét. entre HB & BD (289. *Inſt. T.* 2.)) de D en O ſur l'horiſon DS, il faut faire voir que le mobile, ayant parcouru uniformément DO, ou BR = 2 BM, avec la vîteſſe acquiſe en tombant de H en B, ſera tombé préciſément, dans le même tems, de la hauteur BD ou RO.

DEM. Soit T le tems que le mobile a employé à tomber de H en B ; t le tems qu'il ſera à parcourir BD en vertu de ſa peſanteur. On ſçait qu'en vertu de la viteſſe acquiſe en tombant de H en B, dans le tems T, le mobile doit parcourir uniformément 2 HB, double de HB, dans le même tems T (102.). De plus, quand les viteſſes ſont égales dans le mouvement uniforme, les eſpaces parcourus 2 HB, 2 BM ou DO, ſont entre eux comme les tems T, t, employés à les parcourir ; ainſi 2 HB. 2 BM, ou HB. BM :: T. t ; donc $t = \frac{BM \times T}{HB}$ eſt l'expreſſion du tems, que le mobile a mis à parcourir 2 BM ou DO d'un mouvement uniforme.

Examinons maintenant ſi le mobile eſt préciſément tombé de la hauteur BD ou RO, en vertu de ſa peſanteur, dans le tems $\frac{BM \times T}{HB}$. Quelle que puiſſe être cette hauteur x, elle ſera à la hauteur HB, parcourue en tombant dans le tems T, comme le quarré du tems $\frac{BM \times T}{HB}$ eſt au quarré du tems T (97), ou x. HB :: $\frac{\overline{BM \times TT}^2}{\overline{HB}^2}$. TT ; d'où l'on tire $x = \frac{\overline{BM}^2}{HB}$. Ce qui ſignifie que, pendant le tems que le mobile a mis à parcourir 2 BM ou DO uniformément, il eſt tombé, en vertu de ſa peſanteur, d'une hauteur égale à $\frac{\overline{BM}^2}{HB}$; mais cette hauteur eſt préciſément la hauteur BD ou RO ; puiſque (conſt.) HB étant à BM :: BM. BD, on aura BD ou RO $= \frac{\overline{BM}^2}{HB}$. Donc, &c. C. Q. F. D.

133. Voulez-vous ſçavoir préſentement comment on a pû trouver, dans l'hypothèſe préſente, que la portée *de but en blanc* DO ou BR, devoit être égale au double de la moyen. proport. Géom. BM entre HB & BD ; c'eſt-à-dire, comment on a pû déterminer le Point O, où la peſanteur fait rencontrer au mobile l'horiſon DS ? Voici une manière de vous le faire concevoir. Les eſpaces parcourus en tombant, étant entre eux comme les quarrés des tems employés à les parcourir, on aura HB. BD :: TT. tt (97). Ainſi $tt = \frac{TT \times BD}{HB}$. Donc $t = T\sqrt{\frac{BD}{HB}}$ eſt l'expreſſion du tems

que le mobile ſera à tomber de B en D, ou d'une hauteur égale à BD; c'eſt-à-dire, à tomber ſur l'horiſon DS. Il reſte donc à examiner quelle partie de l'horiſontale BT, le mobile peut parcourir uniformément, dans le tems $T\sqrt{\frac{BD}{HB}}$, avec la vîteſſe acquiſe en tombant de H en B. On ſçait que dans le tems T, avec cette même vîteſſe acquiſe, le mobile doit parcourir 2 HB d'un mouvement uniforme (102); donc pendant le tems $T \times \sqrt{\frac{BD}{HB}}$ c'eſt-à-dire, pendant le tems t, il parcourera $2HB \times \sqrt{\frac{BD}{HB}} = 2\sqrt{\frac{\overline{2HB} \times BD}{HB}} = 2\sqrt{HB \times BD}$. Or (conſt.) HB. BM :: BM. BD. Donc $\overline{BM}^2 = HB \times BD$, ou $BM = \sqrt{HB \times BD}$, donc $2BM = 2\sqrt{HB \times BD}$; d'où l'on voit que pendant le tems $t = T \times \sqrt{\frac{BD}{HB}}$, employé par le mobile à tomber de B ſur l'horiſon DS, il parcourera d'un mouvement uniforme, avec la vîteſſe acquiſe en tombant de H en B, une longueur BR ou DO double de BM, moyenne proportionelle géomètrique entre la Ligne de hauteur HB ou la moitié de la plus grande portée, & la diſtance BD ou RO au-deſſus de l'horiſon; qui eſt tout ce que nous avions ſuppoſé dans la Propoſition précédente, & démontré être véritable, ſans avoir fait connoître comment nous y étions parvenus [a]

[a] Je ſaiſis, autant qu'il m'eſt poſſible, en faveur des Commençans, l'occaſion de comparer la *Synthèſe* à l'*Analyſe*; afin de les convaincre de la grande ſupériorité de cette dernière ſur la première. Par la *Synthèſe* on propoſe les vérités toutes découvertes; & l'on démontre qu'elles ſont effectivement ce qu'on les ſuppoſe: mais par l'*Analyſe* on fait voir comment on les a découvertes. La *Synthèſe* expoſe les productions du génie; l'*Analyſe* montre le génie même. Dans la *Synthèſe* on ne ſçauroit douter que l'on ne doive aux autres tout ce que l'on apprend; dans l'*Analyſe* on eſt tenté de croire, & il arrive ſort ſouvent qu'on ne doit qu'à ſoi-même ce que l'on découvre. Enfin avec l'une la mémoire eſt plus exercée, & avec l'autre le génie eſt plus cultivé.

Application de toute la Théorie précédente à la Pratique.

134. PROB. Trouver l'amplitude d'une Parabole ou d'un jet, dont l'étendue eſt au niveau des Batteries, en ſuppoſant que l'Angle d'élévation ſoit déterminé.

RÉSOL. On commencera par faire une épreuve bien exacte, en tirant la pièce d'Artillerie ſous un Angle quelconque d'élévation bien connu, & que j'appelle a. Après quoi l'on meſurera avec la plus rigoureuſe préciſion l'étendue p de ce jet. Moyennant quoi on va voir que l'on détermine, avec une extrême facilité, toutes les portées d'une même pièce, quelque ſoit l'Angle d'élévation; pourvû que les bombes ou les boulets jettés ſoyent toujours du même calibre, du même poids, & pouſſés avec la même force, c'eſt-à-dire, avec la même quantité de poudre, à laquelle on ſuppoſe toujours la même force.

Veut-on jetter la bombe ſous l'Ang. de 30^d, & connoître où elle ira tomber? On fera cette Règle de Proportion, le Sinus du double de l'Angle a de l'épreuve, eſt au Sinus du double de l'Angle de 30^d, ou au Sinus de 60^d comme la portée p de l'épreuve eſt à un quatriéme terme x, qui ſera l'amplitude cherchée (120). Or les trois premiers termes de cette proportion ſont donnés; le quatriéme x ſera donc connu, quelque ſoit l'Angle d'élévation.

135. PROB. Trouver l'Angle de l'élévation que l'on doit donner à la pièce, pour chaſſer le boulet ou la bombe à une diſtance E déterminée [a].

RÉSOL. Faites encore cette Règle de Proportion: *la portée p de l'épreuve eſt à l'amplitude* E *donnée comme le Sinus*

[a] Il eſt clair que cette diſtance ne doit pas excéder la plus grande portée, c'eſt-à-dire, celle qui réſulte de la pièce élevée à 45 degrés, (121): c'eſt pourquoi, afin que l'on connût d'abord cette plus grande portée, je conſeillerois que l'on fît toujours l'épreuve ſous l'Angle de 45 degrés; ou, ce que j'aimerois mieux, ſous celui de 15, dont l'amplitude doublée feroit connoître celle de la plus grande (124); parce qu'alors on auroit bien moins de peine à meſurer le coup d'épreuve, & en même-tems beaucoup moins d'erreurs à craindre.

du double de l'Angle a de l'épreuve eſt à un quatriéme terme y, qui ſera le Sinus du double de l'Angle cherché. On trouvera donc ce Sinus, puiſque les trois premiers termes de cette proportion ſont donnés, & par conſéquent ſon Angle correſpondant, dont la moitié déſignera l'Angle d'élévation que l'on cherche.

136. REMARQUE. Comme il y a deux Angles également éloignés de 45, qui ſatisfont à cette queſtion (122); on prendra le plus convenable au deſſein que l'on aura. Si l'on a beſoin que le boulet ou la bombe s'élève à une hauteur conſidérable, & que l'Ang. trouvé ſoit, par exemple, de 35^d, il faudra mettre la pièce à 55; afin que le Projectile s'élève plus haut, &c.

137. PROBL. Déterminer la diſtance où la pièce porte ſon boulet, quand on la tire *de but en blanc*; étant à une hauteur connue au-deſſus du niveau de la campagne.

RÉSOL. Vous n'avez qu'à prendre le double de la moyenne proportionelle géométrique, entre la moitié de la plus grande portée de la pièce & ſa hauteur au-deſſus de l'horiſon (132). Or nous ſuppoſons que la moitié de la plus grande portée eſt connue par l'épreuve, & que l'on a meſuré auſſi la hauteur de la pièce au-deſſus du niveau de la campagne. Ainſi la moyenne proportionelle géométrique entre ces deux grandeurs ſe trouvera aiſément. Si ces deux quantités ſont données en nombres, après les avoir multipliées l'une par l'autre, on en tirera la Racine quarrée, dont le double exprimera la portée *de but en blanc*. Car ſoit m la moitié de la plus grande portée; h la hauteur de la pièce au-deſſus de l'horiſon; z la moyenne géométrique cherchée; on aura $m.z::z.h$; donc $zz=hm$; ainſi $z=\sqrt{hm}$; donc $2z=2\sqrt{hm}$ (132).

138. Il peut arriver, & il arrive fort ſouvent, que les Batteries ſont placées plus bas ou plus haut, que l'endroit où l'on ſe propoſe de jetter des bombes; c'eſt-à-dire, que cet endroit ſe trouve dans un Plan incliné au-deſſus ou au-deſſous de l'horiſon. Et, dans ces deux cas, ou il s'agit de

trouver le Point dans lequel la bombe rencontrera le Plan incliné, la pièce étant tirée ſous un Angle donné; ou bien il faut déterminer l'Angle d'élévation néceſſaire, pour que la bombe paſſe par un Point déterminé ſur ce Plan. Nous allons donc propoſer ces Problêmes, dont la réſolution achévera de nous faire connoître, tout ce qui nous reſte à ſçavoir ſur la doctrine dont nous traitons.

139. PROB. Soit MQ (fig. 26 & 27) l'amplitude horiſontale connue d'une bombe, tirée ſuivant l'Angle donné GMQ, avec une force quelconque. On demande en quel point la Parabole MTQ rencontrera le Plan MR, incliné au-deſſus ou au-deſſous de l'horiſon MQ; c'eſt-à-dire, qu'avec l'amplitude donnée MQ & l'Angle connu GMQ, il s'agit de déterminer la diſtance MT.

RÉSOL. Par les Points T, Q, imaginez les perpendiculaires, TS, GQ, ſur l'horiſontale MQ prolongée, s'il eſt néceſſaire; & du Point R, où le Plan incliné rencontre la perpendiculaire GQ, tirez RS au Point S de l'horiſontale, où tombe la perpendiculaire TS: il eſt certain (32) que cette conſtruction donne RS parallèle à MG; on peut d'ailleurs connoître avec une grande facilité ſur le terrain, l'Angle RMQ que le Plan incliné MR fait avec l'horiſon MQ; on n'aura qu'à le meſurer avec un inſtrument.

Remarquez maintenant que dans le Triangle-Rectangle MQG, on connoît l'Angle d'élévation GMQ, & par conſéquent ſon complément MGQ à un droit; l'amplitude MQ eſt auſſi connue; ainſi l'on déterminera GQ en diſant, *le Sinus de l'Angle* G *connu eſt au Sinus de l'Angle* GMQ *donné, comme l'amplitude* MQ *donnée eſt à* GQ, laquelle ſera déterminée par ce moyen. On déterminera de même la valeur de RQ dans le Triangle-Rectangle MQR, en faiſant cette proportion, *le Sinus de l'Angle* MRQ *connu eſt au Sinus de l'Angle* QMR *auſſi connu, comme la longueur donnée* MQ *eſt à* RQ; dans laquelle les trois premiers termes donnés font connoître RQ. Or, puiſque RS eſt parallèle à MG, les Triangles ſemblables GQM, RQS, donneront GQ. RQ :: MQ. SQ. On aura donc la valeur de SQ, puiſque les trois Lignes

Lignes, GQ, RQ, MQ, ſont connues; & par conſéquent celle de MS. Il ne s'agira donc plus, pour connoître MT dans le Triangle-Rectangle MST, que de faire cette proportion, *le Sinus de l'Angle* MTS *connu eſt au Sinus de l'Angle* MST *ou au Sinus total auſſi connu, comme la Ligne connue* MS *eſt à* MT, dans laquelle les trois premiers termes connus déterminent le quatriéme MT. C. Q. F. T.

REMARQ. Comme cette démonſtration renferme les deux cas du Problême, & qu'elle s'applique à la fig. 26, où le Plan MR eſt incliné au-deſſus de l'horiſon, auſſi-bien qu'à la fig. 27, où l'on ſuppoſe le Plan incliné au-deſſous; pour n'être point obligé de conſidérer à la fois deux figures, on appliquera ſucceſſivement à chacune d'elles, les raiſonnements qui conduiſent à la réſolution de ce Problême.

140. PROB. On ſe propoſe de jetter une bombe au Point D (fig. 28 & 29) du Plan BD, incliné au-deſſus ou au-deſſous de l'horiſon BV. Quelle doit être l'inclinaiſon du Mortier placé en B, pour faire paſſer le jet par le Point D?

RÉSOL. Nous ſuppoſons toujours que le Projectile ſoit pouſſé avec une force déterminée, comme celle qu'il auroit acquiſe en tombant de H en B; que l'on connoiſſe ſa plus grande portée ſur le Plan horiſontal BV; que l'on ſçache la valeur de l'Angle DBV, formé par le Plan BD & l'horiſon BV; & qu'enfin l'on ait trouvé, trigonométriquement ou d'une autre manière, la longueur de BD; moyennant quoi on conſtruira, ſur un carton bien uni & avec le ſecours d'une échelle, le Triangle-Rectangle BAD, lequel déterminera l'élévation DA du Point D au-deſſus ou au-deſſous de l'horiſon, & la diſtance horiſontale BA correſpondante. Cela ſuppoſé; comme la Ligne de hauteur eſt toujours égale à la moitié de la plus grande portée du projectile ſur le Plan horiſontal (127), on fera la perpendiculaire HB égale à la moitié de cette plus grande portée connue; on élèvera au Point H la Perpendiculaire indéfinie HO, qui ſera la *Directrice* commune de toutes les Paraboles décrites par un Projectile pouſſé avec une force acquiſe en tombant de H en B (117); & l'on prolongera AD juſqu'à la ren-

tre S de la Directrice HO. Maintenant, puiſque le Point B doit être à la Parabole que nous cherchons, ce Point ſera autant éloigné de la *Directrice* HO que du Foyer de cette Parabole (90); en décrivant donc du Point B avec le rayon BH l'Arc indéfini HF*f*, le Foyer de cette Parabole ſe trouvera en quelque Point de l'Arc HF*f*. Pareillement le Point D devant être à la Parabole cherchée, il ſera autant éloignée de la Directrice HO que du Foyer de cette courbe; ce Foyer ſera donc en quelque Point de l'Arc SF*f*, décrit du Point D avec le rayon DS; & par conſéquent il ſe trouvera à la fois dans les Arcs HF*f*, SF*f*; ce qui ne peut arriver qu'aux interſections F, *f*, de ces Arcs. Ainſi les Points F, *f*, ſont les *Foyers* des Paraboles qui paſſent par le Point D, & il y a deux jets qui réſolvent également le Problême propoſé.

Pour en avoir les amplitudes, des Foyers F, *f*, on abaiſſera ſur l'horiſon BV les Perpendiculaires FG, *fg*, prolongées juſqu'aux Points de rencontre T, *t*, de la *Directrice* HO; on fera GK = BG; *g*V = B*g*; & BK ſera l'amplitude du jet, qui a le Point F pour Foyer, & BV celle du jet dont le Foyer eſt *f*. Préſentement, le ſommet d'une Parabole coupant toujours en deux parties égales la Diſtance de ſon Foyer à ſa Directrice (79), on diviſera les Lignes FT, F*t*, en deux parties égales aux Points C, *c*; qui ſeront par conſéquent les ſommets des Paraboles BCK, BDV. Enfin on aura les Tangentes de ces deux jets, en prenant ſur les prolongemens de GC ou *g*C vers T, *t*, des parties CL, *cl* égales à leurs Abciſſes CG, *cg* correſpondantes, afin de tirer du Point B aux extrêmités L, *l*, de ces prolongemens des Tangentes B*b*, B*d* (30), leſquelles coupans l'Arc HF*f*, aux Points *b*, *d*, détermineront les élévations que l'on doit donner au mortier, pour faire paſſer la bombe par le Point D propoſé. Puiſqu'il n'y aura plus qu'à meſurer avec un inſtrument les Arcs *bg*, *dg*, (fig. 28), ou les Arcs *b*K, *d*K (fig. 29).

On en pourroit pourtant apprécier la valeur trigonométriquement; mais le détail m'en ayant paru exceſſivement

long, ſans une grande apparence de néceſſité, j'ai cru devoir négliger cette recherche. Si l'on veut ſe ſatisfaire ſur tous les rafinemens, dont cette matière eſt ſuſceptible, on conſultera M. *Blondel* dans ſon *Art de jetter les Bombes* [a].

DÉM. Commençons par le jet BCK de la fig. 28. Il éxige que nous démontrions deux choſes. 1°. Que ce jet eſt eſt une Parabole, dont l'Axe CG joint au quart de ſon Paramètre, eſt égal à la Ligne de hauteur HB; ainſi que cela doit être ſuivant le n°. 118. Il faut donc que $4TC$ ou $4HR$ ou $4CF \times CG = \overline{BG}^2$ quarré de l'Ordonnée BG. 2°. Que le Point D eſt néceſſairement un des Points de cette Courbe. Or remarquons 1°. que $BF = BH$ (conſt.) $= GT = FG + CF + CT = 2CF + FG$ (parce que $CT = CF$ (conſt.)); ainſi $\overline{BF}^2 = 4\overline{CF}^2 + 4CF \times FG + \overline{FG}^2$: mais, (à cauſe du Triangle-Rectangle BGF) $\overline{BF}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{FG}^2$; donc $\overline{BG}^2 + \overline{FG}^2 = 4\overline{CF}^2 + 4CF \times FG + \overline{FG}^2$, ou $\overline{BG}^2 = 4\overline{CF}^2 + 4CF \times FG = CF + FG \times 4CF = CG \times 4CF$; le quarré $\overline{BG}^2$ de l'Ordonnée BG, eſt donc égal au Rectangle de l'Abciſſe CG par $4CF$; par conſéquent le jet BCK eſt une Parabole (20), dont le Paramètre $= 4CF$ ou $4CT$, ou $4HR$; ainſi HR eſt le quart du Paramètre de ce jet, & ce quart joint à l'Axe CG ou RB, eſt égal à la Ligne de hauteur HB. C. Q. F. 1°. D.

2°. Pour être convaincu que le Point D eſt à la Parabole BCK, il faut abbaiſſer la Perpendiculaire DM ſur l'Axe CG; & faire voir que $\overline{DM}^2 = CM \times 4CF$. ce qui eſt très-aiſé; car $DF = DS$ (conſt.) $= TM = 2CF + FM$; ainſi $\overline{DF}^2 = 4\overline{CF}^2 + 4CF \times FM + \overline{FM}^2$; mais, par la

[a] J'avertirai ici qu'il ſeroit tout-à-fait inutile d'entamer la lecture de cet Ouvrage, ſi l'on n'eſt pas au fait de la théorie de la Parabole. M. *Blondel* n'y démontre aucunes propriétés de cette Courbe. Il renvoye continuellement à *Archiméde*, dont les démonſtrations contiennent plus d'effort à l'intelligence, que tout ce Traité des Courbes.

Triangle-Rectang. FMD, l'on a $\overline{DF}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{FM}^2$; donc $\overline{DM}^2 + \overline{FM}^2 = 4\overline{CF}^2 + 4CF \times FM + \overline{FM}^2$, ou $\overline{DM}^2 = 4\overline{CF}^2 + 4CF \times FM = CF + FM \times 4CF = CM \times 4CF$; ainsi le quarré $\overline{DM}^2 =$ l'Abciſſe CM multipliée par le Paramètre 4 CF. Or, ſi au Point M on ſuppoſoit une Ordonnée y à l'Axe CG de la Parabole BCK, on auroit $yy = CM \times 4CF$ (20); donc $\overline{DM}^2 = yy$, ou $DM = y$; ce qui démontre que DM eſt l'Ordonnée correſpondante au Point M de l'Abciſſe CM, & qu'ainſi le Point D eſt à la Parabole BCK. C. Q. F. 2°. D.

Prenons maintenant le jet BcV, & montrons 1°. en raiſonnant préciſément comme nous venons de faire, que $\overline{Bg}^2 = cg \times 4ct$, ou $cg \times 4cf$ (parce que $ct = cf$ (conſt.)). 2°. Que $\overline{Dm}^2 = mc \times 4cf$, ou $mc \times 4ct$.

Rappellons-nous donc que $Bf =$ BH (conſt.) $= gt = cg + ct = cg + cf = cf + ct + gf = 2cf + gf$; ainſi $\overline{Bf}^2 = 4\overline{cf}^2 + 4cf \times gf + \overline{gf}^2$. Mais le Triangle-Rectangle Bgf donne $\overline{Bf}^2 = \overline{Bg}^2 + \overline{gf}^2$; donc $\overline{Bg}^2 + \overline{gf}^2 = 4\overline{cf}^2 + 4cf \times gf + \overline{gf}^2$, ou $\overline{Bg}^2 = 4\overline{cf}^2 + 4cf \times gf = cf + gf \times 4cf = cg \times 4cf$, ou $cg \times 4ct$; par conſéquent $\overline{Bg}^2 = cg \times 4ct$; ainſi (20) le jet B$c$V eſt une Parabole, dont le Paramètre $= 4ct$; donc ct eſt le quart de ce Paramètre. Or il eſt clair que ce quart joint à l'Axe cg, eſt égal à DH Ligne de hauteur, ainſi que cela doit être (118). Il nous reſte donc à démontrer que le Point D eſt à la Parabole BcV.

Or il eſt certain que $Df = DS = mt = mc + ct = mc + cf = mc + mc + mf = 2mc + mf$; ainſi $\overline{Df}^2 = 4\overline{mc}^2 + 4mc \times mf + \overline{mf}^2$; mais (à cauſe du Triangle-Rectangle Dmf) $\overline{Df}^2 = \overline{Dm}^2 + \overline{mf}^2$; donc

$\overline{Dm}^2 + \overline{mf}^2 = 4\overline{mc}^2 + 4\overline{mc} \times \overline{mf} + \overline{mf}^2$, ou $\overline{Dm}^2 = 4\overline{mc}^2 + 4\overline{mc} \times \overline{mf} = \overline{mc} + \overline{mf} \times 4\overline{mc} = cf \times 4\overline{mc} = ct \times 4\overline{mc} = \overline{mc} \times 4ct$; donc $\overline{Dm}^2 = \overline{mc} \times 4ct$; mais le quarré zz de l'Ordonnée z au Point m de l'Axe cg, égaleroit auſſi le Rectangle de l'Abciſſe mc par le Paramètre $4ct$; donc $zz = \overline{Dm}^2$, ou $z = Dm$. Par conſéquent Dm eſt véritablement l'Ordonnée au Point m de l'Axe cg; d'où il eſt manifeſte que le Point D eſt à la Parabole BDV [a].

141. REMARQ. Il n'y a rien, ce me ſemble, de plus ſimple que la conſtruction de ce Problême; l'interſection de deux Arcs de Cercle déterminant les Foyers des jets; moyennant quoi tout le reſte ſe trouve avec une extrême facilité. Je me ſuis pourtant appliqué particulièrement à en développer l'eſprit; dans la perſuaſion où je ſuis que, s'il y a un art de former le génie, comme je crois en avoir de fortes démonſtrations, c'eſt de faire paſſer le Lecteur par tous les degrés, qui ont conduit à certaines découvertes importantes. A force de voir comment on s'y eſt pris pour en faire, il reſte dans la tête des eſpèces de Moules, où de nouvelles productions viennent prendre leurs formes. Dans les Sciences & dans les Arts, ce ſont moins les inventions que j'admire, que les Méthodes d'inventer. Une découverte n'eſt qu'une découverte; au lieu qu'une bonne Méthode eſt comme la mère d'un nombre illimité de découvertes.

Quand le Point D ſera ſuppoſé au-deſſous de l'horiſon, on ſe ſervira de la fig. 29; ſur laquelle faiſant les mêmes raiſonnemens, on trouvera les Foyers F, f, des deux jets, qui réſoudront le Problême; & les Tangentes Bb, Bd de

[a] Je prie les Lecteurs pénétrans de me pardonner la diffuſion où je me jette; une longue expérience m'ayant convaincu, qu'en ces ſortes de matières, les Commençans préféroient la facilité d'apprendre à l'honneur qu'on feroit à leur ſagacité, en ne leur préſentant que des démonſtrations bien ſerrées & bien conciſes, qui donneroient la torture à leur eſprit. De la manière dont je m'y prens, j'ai en vûe d'éxercer l'eſprit plutôt que de le fatiguer: encore avec cette précaution, ai-je tout lieu de craindre que, pour bien des gens, cet éxercice ne ſoit un vrai travail.

ces jets au Point B, ſeront les directions ſuivant leſquelles il faudra pointer le Mortier, pour chaſſer la bombe au Point D au-deſſous de l'horiſon.

On verroit bien, ſans que je le diſe, que le Problême n'auroit qu'une ſeule réſolution dans ces deux cas, ſi les deux Cercles ne faiſoient que ſe toucher, & qu'il ſeroit abſolument impoſſible, s'ils ne s'entrecoupoient pas. Je n'y fais faire attention que parce qu'un grand nombre de perſonnes ne penſent aux choſes, que quand on les en avertit. Le génie même conſiſtant ſouvent beaucoup plus, à s'aviſer de faire une recherche, qu'à trouver les moyens d'arriver à ſon terme. C'eſt pourquoi j'ajouterai encore ici que, pour trouver les Tangentes B*b*, B*d*, ou les directions du Mortier, il n'eſt point du tout néceſſaire d'en tracer les Paraboles; il ſuffira, après avoir trouvé les Foyers des jets, de déterminer les ſommets de leurs Axes, par le ſecours de leur Directrice commune. Car alors avec les Ordonnées menées du Point B, on aura les Sous-Tangentes (30), & par conſéquent les Tangentes cherchées ou les Directions du Mortier.

Comme il eſt utile, en certaines rencontres, de connoître la hauteur à laquelle une bombe s'élève, afin d'être en état d'évaluer, par la viteſſe acquiſe, la force avec laquelle elle doit frapper le corps ſur qui elle tombe, nous allons donner la Réſolution de quelques Problêmes relatifs à cet objet.

142. PROB. L'Amplitude B*t* (fig. 23.) étant donnée avec l'Angle d'élévation *b*B*t*, trouver la plus grande hauteur *de*, à laquelle la bombe s'eſt élevée.

RÉSOL. La Ligne B*b* ou B*x* étant la Tangente du jet, il eſt évident que la perpendiculaire *ex*, élevée ſur le milieu *e* de l'Amplitude B*t*, en eſt la Sous-Tangente, laquelle eſt double de l'Abciſſe ou de la hauteur *de* que l'on cherche. Ainſi, en déterminant *ex*, ſa moitié *de* ſera connue. Or, dans le Triangle-Rectangle B*ex*, B*e* moitié de l'Amplitude B*t* eſt donnée; on ſuppoſe auſſi l'Angle *e*B*x* connu; donc l'Angle B*xe* le ſera auſſi. Par conſéquent en faiſant cette

proportion, *le Sinus de l'Angle x connu eſt au Sinus de l'Angle eBx donné, comme la longueur* B*e connue eſt à la hauteur cherchée ex*, on déterminera *ex*, & par conſéquent ſa moitié *de*, qui marquera la hauteur où la bombe s'eſt élevée C. Q. F. T.

143. Prob. On voudroit qu'une bombe s'élevât à une hauteur connue *de*, quel doit être l'Angle d'élévation du Mortier placé en B?

Résol. Il ne faut pas que la hauteur propoſée ſoit plus grande que BH, moitié de la plus grande portée, que je ſuppoſe connue. Parce que la moitié de la plus grande portée, eſt toujours égale à la hauteur d'où le mobile a dû tomber, pour acquérir la force avec laquelle il eſt chaſſé (127); & qu'il n'eſt pas poſſible que ce corps s'élève au-deſſus de cette hauteur (128).

Remarquez donc que *de* étant connue, *aB* ſon égale le ſera auſſi, & par conſéquent *aH*; puiſque BH eſt donnée; donc *ab*, moyenne proportionnelles géométrique entre *aB* & *aH*, ſera déterminée. Maintenant dans le Triangle Rectangle B*ab*, avec les deux côtés connus *aB*, *ab*, on aura l'hypothénuſe B*b*. Donc, en faiſant cette proportion, B*b*. *aB*:: le Sinus total eſt au Sinus de l'Angle B*ba*, ce dernier Sinus ſera connu; & par conſéquent l'Angle B*ba*, qui eſt égal à l'Angle d'élévation *b*B*t* cherché. C. Q. F. T.

Prob. Mais comment peut-on donner à un Mortier une inclinaiſon déterminée, par exemple, de 50^{d} (fig. M. PL. 2.)?

Résol. Comme le commencement du jet de la bombe doit ſe faire dans la Direction de l'Axe TS, afin d'éviter, le plus qu'il eſt poſſible, le frotement de ce boulet contre les Parois de ſon Mortier; le Problème ſe réduit à trouver un moyen d'incliner TS ſur l'horiſontale T*r*, de manière que l'Angle ST*r* = 50^{d}.

Pour cela on prendra un quart de Cercle ABC diviſé en ſes dégrés & minutes; on y joindra une large Règle AD parallèle à BC, avec un Pendule B*f*, on mettra cette Règle diamètralement ſur l'orifice ou la *Bouche* du Mortier; on fera, moyennant le Pendule, que

le Plan du quart de Cercle ſoit perpendiculaire ſur le Plan de cette Bouche. Après quoi on fera tourner le Mortier ſur ſon *Affût*, c'eſt-à-dire, ſur la machine deſtinée à le ſoutenir dans toutes ſes poſitions, juſqu'à ce que le Pendule ou l'aplomb B*f* coupe le quart de Cercle au cinquantiéme dégré, en commençant à compter du Point C juſqu'à la rencontre du fil B*f*, & alors le Mortier aura l'inclinaiſon que l'on demande.

DÉM. Il s'agit de faire voir que l'Angle ST*r*, formé par l'Axe TS & l'horiſontale T*r*, eſt égal à l'Angle CB*f*. Prolongez donc le Pendule B*f* juſqu'à l'horiſontale T*r*, pour avoir l'Angle droit en *r*: &, par la conſt. du Mortier, TS étant perpendiculaire ſur ſa bouche, ainſi que l'eſt AB (ſupp.), on aura TS parallèle à AB; donc l'Angle S eſt droit. Ainſi les Triangles *f*BS, *f*T*r* étant évidemment équiangles, l'Angle CB*f* ſera égal à l'Angle *f*T*r* ou ST*r*; mais C B*f* = 50° (conſt.), donc ST*r* égale auſſi 50; & par conſéquent l'on a l'Angle d'élévation propoſé.

144. Terminons ce Traité du *jet des bombes*, qui me paroit aſſez complet, par les difficultés que l'on a faites contre ſa théorie.

1°. Les directions FM, RC, KV de la peſanteur (fig. 22.) ne ſçauroient être parallèles entr'elles; parce que, l'expérience démontrant que ces directions ſont perpendiculaires à la ſurface courbe de la terre, il eſt impoſſible que toutes les Perpendiculaires à une Courbe ſoient parallèles entre elles.

2°. La vîteſſe imprimée à une bombe jettée en l'air, n'eſt point uniforme dans tous les Points de ſon trajet; puiſqu'il eſt certain par l'expérience, & la raiſon le conçoit aiſément, qu'une bombe ne va pas auſſi vîte en avant, vers la fin de ſa chute qu'au commencement de ſon jet.

3°. Si dans un vuide parfait, les eſpaces parcourus en vertu de la peſanteur, ſont entr'eux comme les quarrés des tems employés à les parcourir, on ne ſçauroit douter que cette proportion ne ſoit fort altérée, dans un *milieu* tel que l'air, où la différence des denſités & des mouvemens multi-

plie & varie les obſtacles. La Courbe que décrivent les bombes en l'air, ne ſçauroit donc être une Parabole.

4°. Si l'on ajoute à ces conſidérations les erreurs inévitables, qui naiſſent du peu de juſteſſe des inſtrumens, ainſi que de la manœuvre néceſſaires dans la pratique du jet des bombes, on ſe croira très-fondé à n'admettre d'autre utilité dans la théorie précédente, que celle de préſenter à l'eſprit un très-beau ſpectacle; mais à pure perte pour les beſoins ou la conſervation du corps.

M. *Blondel* a réſolu toutes ces difficultés d'une manière ſi complette, dans ſon Ouvrage ſur l'*Art de jetter les bombes*, que je ne ſçaurois mieux faire que d'y renvoyer pour ce qui en regarde le détail. Je me bornerai donc ici à une ſeule réponſe, qui fait évidemment face à toutes les objections poſſibles. C'eſt que ſuivant les expériences inſérées dans *le Bombardier François* de M. de *Bélidor*, leſquelles ont été faites expreſſément dans le deſſein d'en comparer les réſultats avec ceux de la théorie, il n'y a pas très ſouvent deux toiſes de différence, entre les déterminations Géométriques & celles de l'expérience, malgré la multitude des cauſes inévitables d'erreurs de pratique, qui conſpirent à les éloigner de la préciſion théorique.

Expériences qui confirment la théorie précédente. Ceux qui craindroient de prononcer en faveur de cette théorie, vû la multitude d'obſervations qui paroiſſent l'infirmer, & qui en altèrent effectivement la rigueur, pourront ſe raſſurer en liſant le détail des expériences ſuivantes; elles ſont ſi authentiques, & les perſonnes éclairées qui les ont faites ou vûes, avoient un ſi grand intérêt à ne les pas admettre, que leur approbation y met, ce me ſemble, le ſceau le plus parfait que l'on puiſſe déſirer. Elles ſont extraites du Diſcours Préliminaire du *Bombardier François* de M. de *Bélidor*. p. x. » Sur la fin de l'année 1725, lorſque mes Tables furent achevées, dit M. de *Bélidor*, tout le monde déſira en faire des » épreuves..... On commença par charger un Mortier à » une livre de poudre ſans terre, que l'on pointa à 15 de» grés; on jetta deux bombes, qui furent à peu de choſe

» près à la même distance ; ensuite on tira les mêmes bom-
» bes à 45 degrés encore avec une livre de poudre, pour
» voir si les portées seroient doubles des précédentes (*ainsi*
» *que la théorie le donne*) ; en effet elles se sont trouvées telles
» qu'on l'espéroit. L'on a fait la même vérification à deux
» ou trois livres de poudre, & les portées de 45 se sont
» trouvées double de celles de 15.

» Convaincu de la certitude du principe fondamental
» sur lequel les Tables avoient été construites, M. *Tuffereau*
» (alors Commandant de notre École de la Fère), deman-
» da que l'on jettât des bombes à 40 toises de distance : on
» chercha dans les tables (*calculées sur la théorie de la Para-*
» *bole*) le degré, qui répondoit, pour cette portée, au coup
» d'épreuve de 15 degrés à une livre de poudre, & le Mor-
» tier pointé sur l'élévation marquée chassa la première
» bombe à 39 toises, & la seconde à 41 toises. Il deman-
» da encore de jetter avec la même charge, deux autres
» bombes à 70 toises ; & (*les élévations du Mortier ayant été*
» *prises dans les Tables*) la première fut à 71 toises, & la se-
» conde à 71 toises 4 pieds.

» On chargea le Mortier à deux livres de poudre, tou-
» jours sans terre, pour jetter des bombes à des distances
» plus éloignées. Comme on venoit de changer la charge,
» on tira un nouveau coup d'épreuve ; & on proposa d'en
» jetter deux à 100 toises. La premiere fut à 102, & la
» seconde à 100 toises 5 pieds. On proposa encore de jet-
» ter deux autres bombes à 120 toises ; la première se trou-
» va beaucoup trop courte, parce qu'il étoit arrivé quelque
» dérangement au coussinet ; mais on en tira une seconde
» au même degré que la précédente, qui fut à 118 toises
» 3 pieds, & une troisiéme à 121 toises : enfin on deman-
» da des portées beaucoup plus grandes encore, qui allè-
» rent assez bien, tant qu'on ne se servoit point de terre.....
» Quelques jours après on tira avec de la terre, pour jetter
» des bombes à 200, 250 & 300 toises, dont les portées s'ac-
» cordèrent passablement avec les Tables ; mais pas si bien
» que quand on tiroit avec de la poudre seulement. On en

» jetta d'autres à 400, 500 & 600 toiſes, dont les portées » ſe trouvèrent plus courtes de 8 à 10 toiſes qu'elles ne de- » voient être ſuivant les Tables *(on peut en voir la raiſon à la Note inférieure (a)*.

» Au commencement du mois de Mai 1731, ayant reçu » de l'Imprimerie Royale un exemplaire des Tables qu'on » venoit d'achever d'imprimer, les Officiers de Royal-Artil- » lerie du Bataillon de M. de la *Perrelle*, & ceux de l'Artille- » rie, m'ont engagé à faire de nouvelles épreuves, qu'ils » ont ſuivies pendant pluſieurs jours avec beaucoup d'ap- » plication, & nous avons tiré enſemble des bombes de » deſſein prémédité, avec toutes ſortes de Mortiers, à 50, » 112, 150, 200, 250 & 300 toiſes de diſtance, qui ont » fort bien réuſſi, comme on le peut voir par la relation » qu'ils en ont fait eux-mêmes, & que j'ai rapportée à la fin » de ce Diſcours, &c. «

Après des expériences de cette nature, ſi quelque fâcheux ou quelqu'opiniâtre vouloit encore conteſter ici l'introduction des Règles Géométriques dans l'Artillerie, il faudroit le laiſſer ſe complaire tout ſeul dans ſes idées. Tant que les hommes entendront bien les intérêts de leur propre conſervation, il n'eſt guères à craindre qu'une pareille opinion ſe ſoutienne, & encore moins qu'elle faſſe fortune.

---

[a] Dans les grandes portées, les bombes étant en l'air plus long-tems, il arrive que le mouvement de projection ſe rallentit aſſez, vers la fin du jet, pour en raccourcir l'amplitude; mais on a ſuppoſé ce mouvement uniforme dans la théorie, il doit donc y avoir, en ce cas, quelque différence entre la théorie & l'expérience. Néanmoins, comme on n'établit communément, dans les ſiéges, des batteries de Mortier qu'à 300 toiſes au plus des endroits que l'on veut ruiner avec ces *bouches à feu*, les expériences précédentes démontrent que la pratique du *jet des bombes*, fondée ſur la théorie de la Parabole, eſt tout-à-fait préférable à celle du tâtonnement, qui jette inconteſtablement dans des longueurs & des frais très-préjudiciables. Au lieu que par les Règles Géométriques, il n'y a rien de plus expéditif ni de plus œconome. Parce que, ſi l'on en veut à un objet déterminé & de petite étendue, un ſeul coup d'épreuve règle tous les autres coups; ſi l'on ſe propoſe au contraire de détruire les maiſons & les édifices d'une Ville, 10 toiſes de plus ou de moins ſur de grandes portées ne font rien; l'eſpace, où les bombes peuvent tomber, étant alors très-conſidérable.

Du reſte, il y a un moyen de corriger tout d'un coup les erreurs, dans les grandes portées. Suppoſons que l'expérience ait fait voir, dans les portées de 600 toiſes, que l'amplitude étoit aſſez régulièrement raccourcie de 10 toiſes. Lorſqu'on voudra jetter une bombe à une pareille diſtance, il n'y aura qu'à incliner le Mortier, comme ſi l'on ſe propoſoit de la jetter à 610 toiſes; & l'erreur ſera à peu près corrigée.

Uſage de la Parabole pour calculer l'excavation des Mines.

* 145. UNE *Mine* eſt une chambre ou un fourneau ſouterrain, dans lequel on met une quantité de poudre ſuffiſante, pour faire ſauter ce qui eſt au-deſſus. Les Mines ſont d'un très-grand uſage dans les ſiéges, & peut-être la meilleure invention & la plus redoutable défenſe, que l'on puiſſe oppoſer à l'ennemi qui attaque; il eſt donc important de réduire leur conſtruction à des principes, qui ſauvent les longueurs du tâtonnement & la peſante marche de l'expérience.

Je ne connois rien en ce genre de plus profond ni de plus élégant, que l'excellente Diſſertation ſur les *Mines* par M. de *Vallière*, actuellement Lieutenant Général. Je conſeille fort qu'on s'applique à la bien concevoir. On la trouvera à la fin du troiſiéme Tome de *Polybe*, ſi admirablement commenté par M. le Chevalier *Folard*. Ceux qui ont tant de foi à l'expérience, y verront que ſans le ſecours de la Géométrie, cet illuſtre Auteur ne ſeroit jamais parvenu à ſes découvertes : mais qu'à l'aide d'une bonne théorie, quelques années d'application lui ont dévoilé ce que la pratique de pluſieurs ſiècles avoit tenu conſtamment dans les ténèbres.

S'il ne s'agiſſoit que de la conſtruction des Mines, on n'auroit beſoin que de la Géométrie ſimple. Mais, pour ne pas conſommer inutilement de la poudre, & afin même de ne cauſer du déſordre qu'au degré que l'on ſe propoſe, il eſt néceſſaire d'en proportioner la quantité au poids que l'on veut enlever. Or ce poids ne peut être connu, qu'en calculant la ſolidité de la maſſe de terre que fait ſauter la *Mine;* connoiſſance à laquelle on ne peut parvenir, ſans celle de la figure du vuide, ou de l'excavation que doit laiſſer la Mine, après qu'elle a joué.

M. de Vallière a trouvé que dans les terrains, qui réſiſtent à peu près également dans toutes leurs parties, cette *excavation* ou, comme s'expriment les *Mineurs*, cet *entonnoir* avoit la figure d'un *Paraboloïde*; c'eſt-à-dire, d'un ſolide engendré par la circonvolution d'une Parabole AGDHC (fig. 30.) autour de ſon Axe DB, dont le Foyer occupe le centre du fourneau F.

Avant l'Obſervation de ce célèbre Officier Général, ce ſolide avoit été pris pour un Cône AFC, dont le Sommet étoit en F. On remarqua enſuite qu'il approchoit plus du Cône tronqué AGHC [*a*]. Mais, après un grand nombre d'expériences, faites, à ce qu'il paroît, avec un ſoin très-ſcrupuleux, M. de *Vallière* s'appercevant que le Talud ou la Pente de l'excavation n'étoit pas en ligne droite, ſoupçonna que ce pouvoit être un *Paraboloïde*, dont il ſuppoſa le Foyer au centre du Fourneau.

Pour tourner ſes ſoupçons en certitude, il fit le prolongement DI = FD; & ſe rappellant que la diſtance FC du Foyer F, à un Point quelconque C de la courbure de la Parabole, étoit toujours égale à la diſtance CM ou BI du même Point C à la Directrice KM (90), il porta FC ſur BI, & trouva FC = BI. Il prit une portion quelconque de l'Axe DT, plus grande que DF, & en ayant retranché TS = DF ou DI, il éleva la Perpendiculaire SR; après quoi il trouva la diſtance FR = DT, comme elle le devoit être dans le cas du Paraboloïde : car alors FR = RP (90) = SD + DI = SD + TS = DT.

On ſçait encore que l'Ordonnée FH au Foyer, eſt égale à la moitié du Paramètre de la Courbe (92), & que la diſtance DF en eſt le quart (78); ainſi FH = 2 DF, de même que l'expérience le donna à M. de *Vallière*, &c.

Voilà aſſez de propriétés qui caractériſent la Parabole. On doit donc calculer l'excavation d'une Mine ſur le pied d'un *Paraboloïde*. Or ce calcul ſe fait moyennant la ſimple connoiſſance de la Perpendiculaire FB, élevée du Four-

[*a*] M. de *Bélidor*, Cours de Mathématique.

neau ſur la ſurface du terrain que l'on veut enlever ; &, comme c'eſt de ce côté-là que la Mine doit produire ſon effet, la Perpendiculaire FB eſt appellée *Ligne de moindre réſiſtance*, que l'on a toujours trouvée égale au rayon BC de l'ouverture de l'entonnoir.

Afin donc que l'on voie, que la ſimple connoiſſance de la longueur de la Ligne FB ſuffit, pour avoir la ſolidité de l'excavation d'une Mine ou du Paraboloïde AGDHC, ſoit $FB = BC = a$; & (à cauſe du Triangle-Rectangle iſoſcèle FBC) $\overline{FC}^2$ ou $\overline{CM}^2$ ou $\overline{BI}^2$ (90) $= \overline{FB}^2 + \overline{BC}^2 = 2aa$; donc $BI = \sqrt{2aa}$; & $FI = BI - FB = \sqrt{2aa} - a$; donc $FD = \frac{FI}{2} = \frac{\sqrt{2aa} - a}{2}$; donc $FB + FD$, c'eſt-à-dire $BD = a + \frac{\sqrt{2aa} - a}{2}$, où tout eſt connu.

Mais le rayon BC de la Baſe de l'entonnoir étant connu, la ſurface de cette Baſe le ſera auſſi : il n'y aura donc qu'à la multiplier par la moitié de la hauteur BD du Paraboloïde, pour avoir la ſolidité que l'on cherche (72).

Pourvû donc que l'on ſçache, de combien le Mineur doit s'enfoncer Perpendiculairement pour conſtruire ſon Fourneau, on ſçaura la ſolidité ou le nombre de pieds Cubes de terre, que la Mine fera ſauter : &, en déterminant par expérience, la quantité de poudre néceſſaire pour enlever un pied Cube de l'eſpéce de terrain, où la Mine eſt pratiquée, on connoîtra tout ce qu'il faudra en employer, pour faire ſauter la maſſe entière de l'Excavation.

Cependant il me ſemble que l'on ne doit faire entrer, dans la ſolidité des Terres enlevées par la Mine, que le Paraboloïde tronqué AGFHRC ; c'eſt-à-dire, la partie du Paraboloïde entier ADC, laquelle ſe trouve au-deſſus de la double Ordonnée GH au Foyer F ; la cavité inférieure ou le petit Paraboloïde GDH n'étant occaſionné en apparence, que par la compreſſion de la Poudre, du côté du

Sommet D. En ce cas, pour avoir la vraie ſolidité des Terres enlevées, on ôtera du Paraboloïde entier ADC le petit Paraboloïde GDH, dont toutes les dimenſions ſont connues par celles du grand (puiſque FH = 2 FD (92 & 78) qui eſt une grandeur déterminée); & ce qui reſtera de cette Souſtraction, exprimera la ſolidité du Paraboloïde tronqué.

Mais, ſi l'on vouloit calculer cette excavation, dans l'hypothèſe du Cône tronqué AGHC, il faudroit encore meſurer FH; moyennant quoi, on trouveroit aiſément par le ſecours des Triangles ſemblables CBE, HFE, la longueur des hauteurs FE, BE, leſquelles ſerviroient à déterminer la ſolidité du grand Cône AEC, ainſi que celle du petit Cône GEH; après quoi ôtant GEH de AEC, il eſt clair que l'on auroit le Cône tronqué AGHC.

* 146. REMARQ. Ceux qui regardent l'excavation d'une Mine comme un Cône tronqué, diſent qu'ils ont trouvé par expérience, que $FH = \frac{BC}{3}$. Or il faut bien remarquer qu'il n'en eſt pas de même dans la ſuppoſition d'un Paraboloïde entier ou tronqué. Car alors on auroit GH = BC: mais GH = le Paramètre de la Courbe génératrice (93); ainſi l'Ordonnée BC ſeroit égale au Paramètre p. Donc $\overline{BC}^2$ étant égal à BD × p (20), on auroit pp = BD × p, ou p = BD; or on a déja vû que p = BC; donc BD = BC; mais l'expérience a auſſi démontré que BC = BF; donc BD égaleroit BF; ce qui eſt abſurde.

On doit ſe rendre attentif à cette obſervation, afin de ſe garantir d'une inadvertance, où ſont tombés quelques Auteurs, qui n'ont pas laiſſé de ſuppoſer $FH = \frac{BC}{3}$; quoi qu'ils calculaſſent l'excavation d'une Mine, dans la ſuppoſition *d'un Paraboloïde.*

147. Comme il ſera queſtion, dans la ſuite de *Conoïdes* convèxes ou concaves, il eſt à propos de faire connoître comment on peut les former artificiellement. Un *Conoïde* eſt un ſolide engendré par la circonvolution d'une *Section conique* quelconque autour de ſon Axe. Mais on l'appelle

en particulier *Paraboloïde*, *Ellipſoïde*, ou *Hyperboloïde*, ſelon que la Courbe génératrice eſt une *Parabole*, une *Ellipſe* ou une *Hyperbole*.

148. *Manière de conſtruire artificiellement un Conoïde ou un Solide quelconque convexe ou concave.* On tracera ſur du Cuivre, de l'Acier, &c, la Courbe génératrice propoſée, une *Parabole*, par exemple, s'il s'agit d'un *Paraboloïde*; ayant un très-grand ſoin que la matière, ſur laquelle on tracera cette Courbe, ſoit un Plan le plus poli & le plus parfait que l'Art pourra le donner. On fera paſſer par ſon Axe un eſſieu avec une manivelle, ainſi que le montre la figure 31: après quoi découpant le tout, on taillera en biſeau le bord terminé par la courbure; afin que dans la circonvolution qu'on lui fera faire, il n'y ait que la Courbe qui donne la forme à la matière qui lui ſera préſentée. On préparera donc cette matière, en l'excavant à l'œil de manière que l'on puiſſe y introduire le Plan ſur lequel eſt tracée la figure génératrice; fixant enſuite l'Axe de ce Plan, de peur qu'il ne change de Direction, on conçoit qu'en tournant la manivelle, la Courbe imprimera ſa forme, dans tous les Points de ſa circonvolution, ſur la matière où elle roulera; à laquelle on ſuppoſe d'ailleurs aſſez de molleſſe, pour être enlevée facilement par le biſeau, & aſſez de conſiſtence pour retenir la forme imprimée; &, en jettant dans cette concavité que l'on vient d'engendrer, une matière qui la rempliſſe éxactement, on aura un ſolide convèxe de la même forme que celui qui lui aura ſervi de moule.

149. REMARQ. On a donné des machines pour décrire les Courbes par un mouvement continu: mais elles me paroiſſent fort ſuſpectes, quand il s'agit de deſcriptions bien préciſes. Les cordes, les reſſorts, les couliſſes &c, ſont ſujettes à des irrégularités & à des variations, non-ſeulement de la part de l'air ou de l'eau, du ſec ou de l'humide qui les travaille perpétuellement, les tourmente & les déjette; mais encore en conſéquence des impreſſions plus ou moins fortes, que ces différentes pièces reçoivent dans les mouvemens qu'elles éxerçent: de ſorte que par

ce moyen, on n'eſt pas ſûr autant qu'on peut l'être, que l'on ait un ſeul Point de la Courbe, dont la deſcription étoit propoſée. Il me paroît donc évident que l'on doit toujours conſtruire une Courbe génératrice, avec le compas, la plus ſimple de toutes les machines; c'eſt-à-dire, en cherchant ſucceſſivement & géométriquement des Points (25), qui ſoient à la Courbe que l'on demande ſuivant les conditions propoſées. A force de multiplier ces Points, ils formeront une Courbe continue ou fort approchante; auſſi rigoureuſe qu'il eſt poſſible à l'art des hommes de la donner. Et dans le cas où la Courbe ſeroit décrite avec une machine plus compoſée, je conſeillerois qu'on en vérifiât toujours la deſcription, ou qu'on la rectifiât avec le ſimple compas.

Usage de la Parabole dans la conſtruction des Porte-voix.

150. Un *Porte-voix* eſt un inſtrument qui ſert à ſe faire entendre aux autres ou à leur parler de fort loin. Il n'y a guéres plus de cent ans que cette invention eſt connue, ou a été renouvellée en Europe [a]. C'eſt principalement en Mer que l'on en ſent toute l'utilité. Deux Vaiſſeaux qui ſe rencontrent, ne s'approchent pas l'un de l'autre auſſi impunément que deux hommes. Pour peu qu'ils ſe heurtaſſent, ils ſeroient, à cauſe de leur énorme maſſe, expoſés au danger de ſe diſloquer & de couler à fond.

Cependant on a des avis à ſe donner mutuellement. Le tems ne permet pas toujours de mettre la Chaloupe en Mer. Le ſouffle des Vents & le bruiſſement des Eaux dominent ſur la ſimple voix; il faut parler plus haut que la tempête. Il eſt donc utile de rechercher la meilleure conſtruction de l'inſtrument qui peut nous procurer cet avantage.

Principes d'Expérience. 1°. La voix ou la parole ſe diſtin-

[a] Voy. la Diſſertation qui ſuit le n°. 156.

gue d'autant mieux, qu'elle eſt plus préciſément dirigée vers l'endroit où l'on veut ſe faire entendre.

2°. Moins la voix s'étend à la ronde de l'endroit d'où elle part, plus elle a de force pour ſe porter aux Lieux, vers leſquels on lui laiſſe la liberté de ſe propager.

3°. Plus les canaux par où la voix paſſe ſont unis intérieurement, c'eſt-à-dire, moins il y a d'inégalités dans les chemins de la voix, plus eſt grande la facilité de la porter au loin.

4°. La voix conduite par un canal, qui va toujours en diminuant, n'acquière pas un auſſi grand volume, & ne ſe porte pas auſſi loin, que ſi elle paſſoit par un tuyau dont le Diamêtre augmentât continuellement. Les reſſorts de l'Air réduit en un petit eſpace, où ils ne peuvent s'étendre, & trop ſerrés les uns contre les autres, perdent beaucoup de leur activité, le ſon ou la voix doit donc s'émouſſer, & faire moins de chemin. C'eſt le contraire quand elle paſſe dans des canaux dont le calibre va toujours en augmentant.

151. COROL. Il s'enſuit des principes précédens, 1° Que l'embouchure d'un *Porte-voix* eſt une des pièces de cet inſtrument, qu'il faut travailler avec le plus de ſoin. Elle devroit s'adapter ſi éxactement à la bouche, qu'en parlant il ne s'échappât de ce côté aucun filet d'air.

2°. Le corps du *Porte-voix* ne doit point être compoſé, (autant que la commodité le permet) de tuyaux qui s'emboettent les uns dans les autres. Cela cauſeroit des inégalités préjudiciables à la propagation de la voix.

3°. Entre les matières propres à la conſtruction de cet inſtrument, il faut choiſir celles qui ſont les moins ſonores, ou celles dont il eſt le moins aiſé de mettre l'élaſticité en action (ſauf les droits de la plus grande commodité); parce que les matières réſonnantes répandant le ſon à la ronde, cela ne peut être qu'au préjudice de la propagation des ſons vers un endroit déterminé. Afin donc d'empêcher l'action du reſſort de la propre matière du *Porte-voix*, il me ſemble qu'il ſeroit fort à propos de revêtir la ſurface extérieure

de cet inſtrument de quelque peau, cuir ou chagrin, qui arrêtât ou amortit l'oſcillation de ſes molècules.

J'appellerai dans la ſuite *Ligne vocale* ou *Rayon ſonore*, toute Ligne ou tout filet d'air ſur lequel la voix eſt portée.

4°. Quant à la figure géométrique du *Porte-voix*, il faut qu'elle détermine les Lignes vocales à ſe croiſer le moins qu'il eſt poſſible, & par conſéquent à tendre au paralléliſme, ou même à ſuivre des directions parallèles; moyennant quoi elles iront toutes de la manière la plus parfaite à l'endroit où l'on a intérêt de faire entendre ſa voix, ou de faire diſtinguer ſes paroles.

152. PROPOS. I. Le Porte-voix de forme cylindrique ou conique, ainſi qu'on le conſtruit communément, n'eſt pas auſſi parfait qu'il pourroit l'être (fig. 33. & 34.).

DÉM. Soit AA l'*embouchure* du *Porte-voix*, BC ſon *corps*; CD ſon *Pavillon*; Ox ſon *Axe*; O le Point de l'embouchure d'où les *Lignes vocales* OF, OL, &c. ſont ſuppoſées partir. L'expérience démontre qu'un filet d'air qui part d'un Point, ou qui paſſe par un trou fort étroit, s'épanouit en forme d'aigrette, dès que rien ne s'y oppoſe; la plûpart des Lignes vocales OF, OL, viendront donc heurter les parois intérieures du tube BC; & ſe réfléchiront à leur rencontre, de manière que l'Angle de réfléxion ſera toujours égal à l'Angle d'incidence, ſuivant le principe de Catoptrique ſi connu. Or je dis que dans le Porte-voix cylindrique (fig. 33.), il n'eſt pas poſſible que les Lignes de réfléxion deviennent parallèles à l'Axe Ox; comme elles devroient l'être pour ſe diriger toutes du même ſens, & conſpirer au même effet. Car il eſt évident que pour être parallèles à l'Axe Ox, dans le cas où elles tomberoient aux Points F, L, &c. il faudroit qu'elles gliſſaſſent le long des parois BC parallèles à Ox; mais cela ne peut jamais arriver; l'Angle obtus OLC de réfléxion ne pouvant pas être égal à ſon Angle OLB d'incidence.

De plus, il n'y auroit pas alors d'Angle de réfléxion, puiſque la Ligne vocale OL enfilant la paroi BC, ne ſe relèveroit pas de deſſus les côtés du corps de l'inſtrument. Donc, &c.

Il n'eſt pas moins aiſé à démontrer dans le Porte-voix de figure conique (fig. 34.), que les Lignes F*s*, L*t* de réfléxion, ne peuvent pas être parallèles à l'Axe O*x* : autrement, elles ſeroient parallèles entr'elles ; & dans ce cas les Angles de réfléxion *t*LC, *s*FC, ſeroient tous égaux entr'eux ; donc les Angles d'incidence OFB, OLB, le ſeroient auſſi ; ce qui eſt abſurde (65. *Inſt. T.* 1.). Donc, &c.

153. REMAR. Quoique la figure conique ne me paroiſſe pas la plus avantageuſe pour la conſtruction des Porte-voix, je la crois néanmoins préférable à la cylindrique, parce que (toutes choſes égales d'ailleurs) les Lignes de réfléxion tendent plus au parallèliſme dans la première que dans la ſeconde ; ainſi qu'il eſt aiſé à démontrer. Par-là elles ſont moins ſujettes à être ballotées dans le corps de l'inſtrument ; & par conſéquent elles conſervent & dirigent plus parfaitement la modification que la bouche leur a une fois imprimée.

Car il eſt eſſentiel ici d'avoir toujours préſent à l'eſprit, qu'il ne s'agit pas ſimplement de faire du bruit avec le Porte-voix, mais de propager des ſons articulés, avec la même impreſſion qu'ils ont reçûe de la bouche. On verra plus bas pourquoi un canon, une trompette, un cor, un tambour, une cloche, &c. peuvent ſe faire entendre de plus loin qu'un Porte-voix ; ſans pouvoir ſervir à propager des paroles ou des ſons articulés.

154. PROPOS. II. La conſtruction la plus avantageuſe du Porte-voix ſimple, c'eſt-à-dire dont le corps n'eſt compoſé que d'une ſeule figure, eſt de le former en Paraboloïde, dont le Foyer ſe trouve dans l'embouchure, préciſément à l'endroit où l'on parle ; afin que les ſons articulés puiſſent partir de ce Foyer, autant que cela eſt poſſible (fig. 35.).

DÉM. Toutes les Lignes vocales OF, OC, ou la plûpart de ces Lignes étant ſuppoſées partir du Foyer O, ſe réfléchiront à la rencontre du Paraboloïde, parallèlement à ſon Axe O*x* (82) ; ainſi elles ſe dirigeront toutes du même ſens ; & conſpirant par-là à un même effet, elles le rendront auſſi parfait qu'il eſt poſſible.

155. REMARQ. I. Comme il peut y avoir d'autres cauſes, qui concourent à augmenter l'effet du Porte-voix, que celles de ſa forme ; il eſt bon d'obſerver que notre aſſertion ſe borne ici, à démontrer que le Porte-voix ſimple, quant à ſa figure ou à ſa forme géométrique, doit être un *Paraboloïde*. C'eſt-à-dire que, toutes choſes d'ailleurs égales, on ne retireroit pas un ſi grand avantage de toute autre conſtruction.

156. REMARQ. II. Il y a une très-grande différence entre la manière dont l'air eſt modifié dans un Porte-voix, & celle dont il l'eſt dans un Cor ou une Trompette. C'eſt principalement en vertu du reſſort de leur propre matière, qui frappe l'air par des oſcillations très-fréquentes, très-ſerrées, très-bruſques, que ces derniers inſtrumens ſe font entendre d'aſſez loin : il eſt même néceſſaire qu'en y ſouffiant, l'air ſorte de la bouche avec une grande preſteſſe. Mais la matière du Porte-voix ne doit point être réſonnante (151) ; 1°. parce que cela ne pouvant arriver qu'en conſéquence du déplacement ou des oſcillations de ſes molécules, le corps de cet inſtrument changeroit continuellement de figure ; ce qui ne manqueroit pas de nuire à la régularité des réflexions des Lignes vocales. 2°. Parce qu'il faut parler avec une certaine modération, afin que l'on puiſſe faire diſtinguer ſes paroles. D'où l'on voit que l'on ne ſe feroit preſque pas entendre, même d'aſſez près, ſi l'on parloit dans un cor ou une trompette, comme on le fait avec un Porte-voix, &c.

On verra plus bas qu'en adaptant un Ellipſoïde à un Paraboloïde, l'effet du Porte-voix peut devenir beaucoup plus puiſſant ; mais alors l'inſtrument eſt compoſé, & il ne s'agit ici que du ſimple.

Diſſertation ſur la découverte du Porte-voix.

Quoique nous ne tenions des Anciens ni théorie ni pratique ſur la conſtruction du Porte-voix ; il faut avouer pourtant que cette invention n'a été que renouvellée dans

le siècle précédent. Le P. *Kircher*, Jésuite, dit (pag. 132. de sa *Phonurgie*) qu'en faisant des recherches dans la Bibliothèque du *Vatican* à Rome, il tomba sur un Livre qui avoit pour titre *Secreta Aristotelis ad Alexandrum magnum*: Secrets d'Aristote dédiés ou envoyés à Alexandre le grand. Il y est question entr'autres, d'un cornet bien prodigieux (fig. 32.) dont ce grand Capitaine faisoit usage. Le son en étoit si fort, qu'il pouvoit se faire entendre à toute son Armée, & la rassembler par son moyen, quand même elle auroit été dispersée à cent stades à la ronde du quartier de son Général. Comme le P. *Kircher* estime à 8 stades le mile d'Italie, on voit que 100 stades valent 12 miles & ½ d'Italie; c'est environ 6 lieues communes de France. Je ne sçache pas que nous ayons des Porte-voix aussi puissans que celui-là. Il avoit 5 coudées ou 15 palmes de diamètre. En supposant la coudée égale à 1 pied & ½, c'étoit 7 pieds & ½ de diamètre. Ce qui compose un très-gros volume pour un pareil instrument. Citons les paroles de l'ingénieux & très-sçavant Jésuite: *Ubi, inter cætera, de cornu prodigioso Alexandri magni hæc leguntur: faciebat hoc cornu adeo vehementem sonum, ut eo exercitum suum ad centum stadia (quorum 8 unum milliare Italicum conficiunt) dispersum convocasse perhibeatur: habebat autem, ut libellus monstrat, quinque cubitos in Diametro.*

Malgré ce témoignage, le Chevalier *Morland*, Anglois, donna en 1670 ou 71, comme de son invention, un Traité écrit en Anglois, sur la construction de différens Porte-voix. Je n'y ai trouvé aucune théorie, à l'exception de quelques raisonnemens qui m'ont paru fort vagues, sur la manière dont l'air éxerce son ressort, le long de son passage dans ces sortes d'instrumens. Si l'Auteur Anglois s'étoit avisé le premier d'en renouveller l'usage, on pourroit lui accorder une partie de l'honneur dûe à une première invention. Quoique le véritable génie consiste à imaginer des moyens qui ne se soient pas présentés à l'esprit de nos prédécesseurs, ou dont l'invention antérieure ne soit pas venue à notre connoissance, c'est en quelque sorte faire

une découverte toute neuve que de retrouver ce qui étoit perdu. Mais le Chevalier *Morland* eſt fort éloigné de ſe trouver dans un cas auſſi favorable, & l'on ne peut pas ſe plaindre, avec plus de raiſon que le P. *Kircher*, de l'uſurpation de cet Anglois. Il eſt hors de doute que cet honneur appartient au célèbre Jéſuite. Ouvrez ſon fameux Ouvrage *Ars magna lucis & umbræ*, imprimé à Rome en 1646, & vous y verrez que plus de 24 ans avant la publication du Traité du Chevalier *Morland*, le P. *Kircher* avoit conſtruit un Porte-voix de forme conique, long de 21 palmes, dont l'iſſue ou le pavillon en avoit 3, & l'embouchure $\frac{1}{4}$; que ce grand Phyſicien s'en ſervoit pour parler au Portier du Collége de Rome, & pour en recevoir des réponſes. Cela eſt confirmé dans un autre Ouvrage de ſa compoſition, qui a pour titre *Muſurgia*; c'eſt un Traité de Muſique fort curieux. Mais il s'explique en termes formels ſur cette dépréda-tion, à la page 112 de ſa *Phonurgie*, imprimée en 1673. On y lit qu'un Porte-voix de ſon invention avoit été conſtruit à Rome, environ 24 ans avant que le Chevalier *Morland* publiât ſon Traité ſur le même ſujet; & qu'un très-grand nombre de perſonnes avoient vû cet inſtrument au Collége des Jéſuites de Rome. Si l'on ſe donne la peine d'examiner ſoi-même les pièces de ce procès, on trouvera que le larcin de l'Auteur Anglois eſt tout-à-fait démontré, & même que ſon travail, indépendamment du défaut d'invention, eſt de beaucoup inférieur à celui du P. *Kircher*.

Du reſte, cette diſcuſſion ſeroit fort indifférente, ſi l'on n'étoit pas convaincu que la conſidération, dont on ſe ſent naturellement pénétré pour les Auteurs de découvertes utiles à la ſociété, eſt une des plus grandes ſources du bien public.

157. USAGE *de la Parabole dans la conſtruction des inſtrumens acouſtiques, ou des cornets propres à corriger les défauts de l'ouie.* Ceux qui entendent difficilement, ou qui ont ce que l'on appelle l'*oreille dure*, peuvent avoir recours à un cornet dont le corps ait la forme d'un Paraboloïde (fig. 36.). Comme il s'agit alors de donner au *Timpan* une com-

motion plus forte qu'à l'ordinaire ; ſi le Foyer F de ce cornet eſt ſitué à l'orifice ou près de l'orifice du *Porte-vent* G, c'eſt-à-dire du petit tuyau courbé que l'on place dans l'oreille extérieure ; & que l'on dirige le cornet du côté où l'on veut entendre ; alors toutes les Lignes vocales telles que AB, CD, qui en viendront heurter les parois intérieures, parallèlement à l'Axe OF, ſeront réfléchies au Foyer F (81). Elles ſe trouveront donc plus condenſées en ce Point que partout ailleurs ; ainſi déployant leurs reſſorts principalement du côté G où il y aura moins de réſiſtance (parce que le ſouffle ou l'ébranlement de la voix forme un obſtacle dans le ſens oppoſé), elles enfileront avec plus d'impétuoſité que de coutume le Porte-vent G, & ſeront plus en état d'agiter le timpan, une des pièces qui tranſmet au ſiége de l'ouie, l'agitation de l'air que l'on ſçait être la cauſe phyſique des ſons.

158. USAGE *de la Parabole dans la conſtruction des Miroirs brûlans par réflexion.* Dirigez, à peu près vers le centre du Soleil, l'Axe OH d'un Paraboloïde concave (fig. 37.), dont les parois intérieures ſoient bien liſſes & bien polies ; quand il ne ſeroit fait que de papier ou de carton, il y aura alors un ſi grand nombre de rayons, qui viendront frapper l'intérieur de cet inſtrument parallèlement ou preſque parallèlement à ſon Axe [*a*], qu'étant réfléchis à ſon Foyer F (81),

[*a*] Les rayons qui viennent d'un Point fort éloigné, tombent ſur une ſurface d'une très-petite étendue ; rélativement à la diſtance de ce Point rayonnant, ſont ſenſiblement parallèles. Pour le concevoir facilement, repréſentez-vous un faiſceau de rayons partans d'un Point lumineux G (fig. D. PL. 3.) & renfermés entre les Lignes GA, GC, leſquelles formant l'Angle très-ſenſible AGC ſont d'abord fort éloignées d'être parallèles ; mais ſi le Sommet G eſt reculé en H, la Baſe AC demeurant toujours la même, alors l'Angle AGC devient AHC, beaucoup plus petit qu'il n'étoit dans la première poſition de ſon Sommet en G ; comme il eſt aiſé à démontrer en tirant la Ligne HGB. De ſorte qu'en reculant continuellement le Sommet H de ſa Baſe AC, l'Angle AHC diminuera toujours ; & par conſéquent pourra devenir ſi petit, qu'il ne ſoit d'aucune conſidération par rapport aux deux Angles HAC, HCA ; donc ces deux Angles enſemble vaudront à très-peu près deux Angles droits ; ainſi, HA étant ſuppoſé égal ou preſqu'égal à HC, l'Angle HAC ſera égal ou preſqu'égal à l'Angle HCA ; chacun d'eux ne différera donc pas ſenſiblement d'un Angle droit ; & les Lignes AH, CH, ſeront ſenſiblement perpendiculaires ſur AC. Or deux Lignes perpendiculaires ſur une troiſiéme Ligne ſont parallèles : donc la Baſe AC

leur réunion y cauſera une chaleur ſi puiſſante, qu'elle pourra y enflâmer des matières combuſtibles. Ce qui eſt conforme à l'expérience.

159. REMARQ. Comme le Foyer F d'un Paraboloïde, ou de la Parabole génératrice de ce ſolide, eſt aſſez près du Sommet H, quand le Paramètre eſt d'une grandeur médiocre; puiſque ce Foyer n'eſt éloigné du Sommet que du quart du Paramètre (78); ſi l'on veut approcher commodément du Point F du côté de H, ou que ce Foyer ſoit au-dehors du Miroir, on enlèvera une partie de ce ſolide, telle que GHT; & la portion qui en reſtera, raſſemblera les rayons en un Point F, qui ne ſera plus au-dedans de ſa concavité. Mais il eſt évident alors que le Foyer perdra de ſa force.

Cependant le Foyer d'un Paraboloïde, peut être autant éloigné que l'on voudra du Sommet de ce ſolide. Car ſon Paramètre pouvant être pris d'une grandeur quelconque, le quart de ce Paramètre, qui eſt toujours la diſtance du Sommet au Foyer (78), pourra auſſi être d'une grandeur quelconque. Mais quand cette diſtance eſt trop conſidérable, le Foyer ceſſe d'être brûlant; parce que l'expérience & le raiſonnement démontrent, que la lumière réfléchie perd peu à peu de ſa force, à meſure qu'elle s'éloigne de ſon Point de réflexion. Effectivement il y a un ſi grand nombre de petits corps ſolides, qui nagent perpétuellement dans l'air, qu'ils renvoyent une partie des rayons qui compoſent un filet ou un faiſceau lumineux. Si ce faiſceau réfléchi a un long eſpace à traverſer, il ſe dégroſſit continuellement & n'a plus à la fin qu'une chaleur ou qu'une force inſenſible.

160. Sans cet inconvénient, on pourroit par le moyen du Paraboloïde concave, convertir un Foyer brûlant en une Ligne brûlante indéfinie, c'eſt-à-dire, enflammer des

étant fort petite, & la diſtance BH fort grande, les rayons AH, CH, tendans au Sommet H, ne s'écarteront pas ſenſiblement du parallèliſme, même pendant un aſſez long trajet.

corps combuſtibles à une diſtance quelconque. Il n'y auroit qu'à diſpoſer un Miroir B Paraboloïde (fig. 38.) & très-grêle, de manière qu'il eût le même Foyer F que le Paraboloïde A d'un volume beaucoup plus grand. Car alors il eſt évident que la groſſe maſſe Cylindrique des rayons parallèles RR, étant réfléchie au Foyer F du Paraboloïde tronqué A (81), ſe diviſera, au-delà de ce Foyer vers B, en rayons divergens, leſquels rencontrans les parois intérieures du Tube B, redeviendront parallèles en *rr* (82); mais, comme on ſuppoſe que le petit Paraboloïde B eſt très-menu, ils compoſeront enſemble un filet ou un faiſceau Cylindrique de lumière fort condenſée. Et par conſéquent ils paroîtroient en cet état fort propres à enflammer des corps combuſtibles à une très-grande diſtance; le Foyer alors régnant en quelque ſorte ſur tous les Points de la Ligne radieuſe indéfinie. Mais cet effet, auquel on s'attend naturellement au premier aſpect, eſt détruit par la cauſe Phyſique, que nous avons fait obſerver (159); ſans compter que la multiplicité des réfléxions affoiblit la vigueur de la Lumière, & que des rayons parallèles ne doivent jamais avoir autant de force pour brûler, que s'ils étoient réünis en un Foyer.

161. Si l'on place la flamme d'une bougie ou d'une chandelle, au Foyer F d'un Paraboloïde concave, (fig. 37.) dont les parois intérieures ſoyent les plus unies & les mieux étamées qu'il ſera poſſible, ce Miroir placé dans une Lanterne la fera paroître toute enflammée, & la lumière de la bougie ſera réfléchie, ou ſe propagera à une très-grande diſtance, avec aſſez de force pour que l'on y puiſſe lire.

La raiſon en eſt que les rayons, qui partent du Foyer F, ſe réfléchiſſent à la rencontre de la ſurface concave du Paraboloïde, parallèlement à ſon Axe (82); & forment par conſéquent un Cylindre de lumière, qui s'étend directement à une fort grande diſtance avec quelque force, quoi qu'il n'y ait qu'une aſſez petite portion de la flamme de la bougie, qui puiſſe être préciſément au Foyer F. Auſſi

le P. *Tacquet* aſſure [*a*] qu'au moyen d'un pareil Miroir, il a été en état de lire un Livre d'un petit caractère, à la diſtance d'environ 400 pieds du Miroir, ou de la flamme de la bougie placée à ſon Foyer; ſans autre lumière que celle qui étoit réfléchie.

162. REMARQ. Cette eſpèce de Lanterne étant principalement deſtinée, à propager la lumière directement devant celui qui la porte, le chaſſis ou la cage qui renferme le Miroir parabolique, doit avoir une diſpoſition parallèle à l'horiſon, & le reſte à l'ordinaire.

163. Il ſeroit auſſi beaucoup mieux de donner une forme Parabolique, aux faces intérieures des jambages d'une cheminée. Pour que les Ouvriers le fiſſent commodément, l'Architecte traceroit géométriquement ſur une planche, une branche de Parabole, d'une longueur proportionnée à la largeur des jambages propoſés; en obſervant que le *Foyer* de cette Courbe tombât vers le milieu de l'âtre. Ce qui ſeroit fort aiſé en donnant à ſon Paramètre ou à ſa double Ordonnée LK au Foyer (93), une longueur égale à la largeur de la cheminée. Ce ſeroit une eſpèce d'Équerre, dont les Maçons ſe ſerviroient dans leurs conſtructions; leſquelles en deviendroient évidemment beaucoup plus avantageuſes pour échauffer une chambre. Car le Foyer de la Parabole génératrice, régnant alors tout le long d'une Ligne verticale de 3 ou 4 pieds, qui s'élèveroit du milieu de l'âtre; la flamme ou tous les corps pénétrés de feu, qui occuperoient cette Ligne *focale* ou même les environs, envoyeroient leur chaleur, c'eſt-à-dire, leurs molécules ou corpuſcules ignés ſur les jambages paraboliques LGD, KTN, ſuivant des Lignes FL, FG, &c, que l'on ſçait devoir être réfléchies dans des Directions LR parallèles à l'Axe HO (82); ou très-approchantes d'être parallèles, quand elles viennent des environs de la Ligne focale; & par conſéquent elles ſeroient préciſément renvoyées dans la chambre. Ainſi concourant à l'échauffer avec les rayons

[*a*] Lib. 3. Catopt.

directs, il faudroit beaucoup moins de bois & moins de tems pour y produire une chaleur modérée. Car, par les conſtructions ordinaires, la plûpart des rayons ignés ſont renvoyés ſur eux-mêmes, ou dans la cheminée, & entraînés ſur le champ par le torrent perpétuel de l'air, qui ſe précipite en cet endroit, dès qu'il y a du feu.

Si l'on vouloit encore œconomiſer davantage, & ſe procurer, ſans qu'il en coutât plus, de la chaleur à tel degré que l'on voudroit; de même que l'on fait venir de l'eau par des canaux & des robinets, on pratiqueroit, directement ſous l'âtre entre les ſolives & les carreaux, un reſervoir ou un baſſin d'air d'environ un pied en quarré, & de 3 ou 4 pouces de profondeur, ſuivant les circonſtances; des Faces latérales de ce baſſin partiroient deux tuyaux, que l'on feroit courir, toujours entre les carreaux & les ſolives, juſques vers le milieu du mur attenant de part & d'autre, & enfin à leur iſſue en cet endroit ſeroit adapté un robinet, dont on va bien-tôt voir l'uſage.

Pour peu que l'on ait employé le feu terreſtre avec intelligence, on ſçait que ſa chaleur pouſſe plus au-deſſous qu'au-deſſus; qu'elle deſcend plus qu'elle ne monte, ou qu'elle eſt plus déterminée à deſcendre qu'à monter. La chaleur de l'âtre pénétrant donc aſſez promptement juſqu'au baſſin, y échauffera l'air contenu, le raréfiera & le rendra plus leger qu'un pareil volume d'air non raréfié, ou dans l'état ordinaire; celui de dehors plus fort ſe précipitera donc dans les tuyaux que je ſuppoſe ouverts, & arrivant au baſſin il en chaſſera l'air échauffé, pour être bien-tôt chaſſé lui-même par un air plus vigoureux, qui ne réſiſtera guéres à l'effort de celui qui vient après. Il y aura donc une perpétuelle circulation d'air, lequel s'échauffant dans le réſervoir viendra en répandre la chaleur dans la chambre, qui ne peut pas manquer par ce moyen d'en avoir bien-tôt un dégré ſuffiſant. Après avoir reconnu au Thermomètre ou autrement, celui qui convient le mieux à la ſanté ou au beſoin actuel, on fermera les robinets pour la conſerver à peu près dans cet état. De manière que

la chaleur inférieure, qui eſt preſque à pure perte ſans cet artifice, deviendra alors la principale ſource de celle dont on aura beſoin.

164. Puiſque des rayons lumineux ou calorifiques FH (fig. 39.) qui partent du Foyer F d'un Paraboloïde concave MHP, ſont réfléchis parallèlement à ſon Axe FG (82); il eſt évident que ces rayons, reçus dans cet état ſur la ſurface concave d'un autre Paraboloïde OLS, dont l'Axe GF & le Foyer G ſoyent ſur la même Ligne que l'Axe & le Foyer du premier Miroir, il eſt évident, dis-je, que ces rayons LG réfléchis une ſeconde fois, viendront ſe réunir au Foyer G, (81.) & pourront par conſéquent y brûler des corps combuſtibles.

Cette Théorie a été confirmée par pluſieurs expériences. M. *Dufay* de l'Académie Royale des Sciences de *Paris*, ayant appris qu'on en avoit fait une à *Prague* qui avoit très-bien réuſſi, ſe propoſa de la répéter à Paris. Elle fut éxécutée en préſence de M. de *Mairan*, Membre & ancien Secrétaire de la même Académie. Voici ce que m'en a dit lui-même ce célèbre Académicien. En l'année 1726. on diſpoſa, à ſix pieds l'un de l'autre, deux Miroirs Paraboliques concaves, ainſi que l'indique la fig. 39. A l'un des Foyers F on mit des charbons ardens, & de la poudre à Canon à l'autre Foyer G. Après quoi ayant fait agir un ſouflet au Foyer F, pour en aviver les charbons, on vit la poudre en G prendre feu en très-peu de tems. Ce qui ſe conçoit au premier aſpect de la figure, en ſe rappellant la théorie de ſes Foyers, que nous avons déja expliquée tant de fois.

165. Le P. *Kircher* rapporte dans ſa *Phonurgie* un trait d'Hiſtoire où il s'agit d'un fait beaucoup plus curieux que le précédent. Il dit l'avoir lû dans l'Hiſtoire des Abiſſins de *Jean Paes*. Cet Hiſtorien rapporte qu'un grand rocher excavé en forme parabolique, eſt capable de faire entendre, à cinquante pas de-là, une voix baſſe qui part de très-loin. Vis-à-vis de ce rocher s'en trouve un autre, au Sommet duquel on entend très-diſtinctement tout ce que

peuvent dire des perſonnes fort éloignées de cet endroit, ſi bas qu'elles puiſſent parler. Quand on ſe met à y crier, on croiroit y entendre les voix réünies de toute une Armée. Les Prêtres du Pays ont très-bien conçu l'uſage que l'on pouvoit faire de cette eſpèce de merveille. Pour démontrer au peuple qu'ils ſont en commerce direct avec la Divinité, ils font monter ceux qui les conſultent au Sommet du rocher; parlant enſuite à voix très-baſſe aux endroits les plus propres à leur deſſein, leurs paroles vont ſe répéter en l'air aux oreilles des Conſultans. Ceux-ci n'apperçevant autour d'eux aucune cauſe ordinaire de cet effet, ſe croyent très-véritablement inſpirés. Mais le Lecteur conçoit qu'avec un pareil artifice, on eſt en état de faire des choſes fort ſurprenantes pour le peuple. Citons les propres paroles de *Laës*, qui met le lieu de la Scêne dans les montagnes de *Goyam*: ... *Eſt hiſce in montibus* (*Goyamæ*) *rupes ingens eâ naturæ induſtriâ excavata, ut ſpeculum remotè aſpicientibus appareat. Huic alia rupes oppoſita, in cujus cacumine nil adeò ſubmiſſe à quantumvis remotis dici poſſit, quod non audiatur: clamantibus verò in dicto loco, ſonum adeò intendi, ut vox exercitus alicujus videatur. Norunt occultam reſonantis naturæ vim ſacrificuli iſtius loci, qui ut ſe divinos demonſtrent, homines in cacumine montis poſitos occultis hujuſmodi vocibus de rebus futuris admonent; ii verò ſe numinis voce afflatos arbitrati, non rarò in maximas calamitates devolvuntur, dum juſſa exequi inconſultius properant.* Suppoſant la vérité de ce fait, je crois avec le P. *Kircher*, que cela n'arrive qu'en conſéquence de la forme d'un miroir concave Sphérique ou Parabolique, que la nature a donnée au premier rocher, & dont le Foyer ſe trouve aſſez préciſément au Sommet du ſecond. Moyennant une pareille diſpoſition, la plûpart des Lignes vocales RL (fig. 37.) réfléchies à la rencontre du rocher concave, ſont renvoyées comme à un même Point du côté de l'autre rocher, au Sommet duquel on éprouve cette eſpèce de prodige.

* *166.* Il n'a été queſtion juſqu'à préſent que du Miroir parabolique concave, dans lequel les rayons partans

du Foyer, ſont renvoyés par la courbure parallèlement à ſon Axe; mais on trouve auſſi que le Miroir paraboliquo convèxe *SaS* (fig. 40.). a préciſément la même propriété, lorſque des rayons *r*S rencontrent ſa convéxité dans une direction à ſon Foyer F.

Pour en avoir la démonſtration, on tracera en quelque Point S la Tangente *mt* à la Parabole génératrice (30); & par le même Point S ayant fait paſſer une parallèle *dg* à l'Axe F*g*, on verra que l'Angle d'incidence *r*S*m* = l'Angle F*St*. Or F*St* = *dSm* (81) = *tSg*; donc *r*S*m* = *tSg*; ainſi *r*S*m* étant l'Angle d'incidence, il faut que ſon égal *tSg* ſoit l'Angle de réflexion, c'eſt-à-dire, que les rayons *r*S ſe réfléchiſſent dans des Lignes S*g*, parallèles à l'Axe *a*F & par conſéquent parallèles entre elles. [*a*]

* 167. USAGE *de la Parabole pour la duplication du Cube.* On a vû dans mes *Inſtitutions* (398. *Inſt. T.* 2.) qu'il s'agiſſoit pour cela, de trouver deux moyennes proportionnelles entre le côté AD du Cube donné, & AC le double de ce côté, (fig. 41.)

Ayant donc pris AC pour l'*Axe* de la Parabole à décrire, & AD pour le *Paramètre* de cette Courbe, on la tracera ainſi qu'il a été enſeigné (n°. 25); & après avoir porté AD ſur l'Axe, du Sommet A en D, on élèvera, ſur le milieu M de AD, la perpendiculaire MO = AD; & du Point O décrivant un Cercle par le Point A, ſi de l'autre Point d'interſection G du Cercle & de la Parabole, on

[*a*] Remarquez qu'un rayon, qui tombe ſur une ſurface courbe, s'y réfléchit comme s'il tomboit ſur la Tangente à cette Courbe, au Point d'incidence. Car, ſi par ce Point l'on faiſoit paſſer effectivement un Plan Tangent, on auroit la direction de la Courbe en ce Point, & par conſéquent l'Angle qu'elle y formeroit avec un rayon incident; n'étant pas poſſible de déterminer autrement l'Angle qu'une Ligne droite fait avec une Courbe; parce que la Tangente à un Point d'incidence déterminé eſt invariable, & fait avec la Courbe un Angle plus petit qu'aucun Angle Recti-Ligne; au lieu que, ſi l'on vouloit eſtimer l'Angle, que fait une Ligne droite en tombant ſur une Courbe, par la divergence de cette droite & d'une portion quelconque de la Courbe, il n'y auroit plus de règle; une Courbe changeant de direction à chacun de ſes Points, l'Angle ſeroit plus ou moins grand ſelon que l'on prendroit une portion de la Courbe plus ou moins grande, pour ſervir de côté à cet Angle.

abbaiſſe ſur l'Axe la perpendiculaire GS, les Lignes GS, AS, ſeront les deux moyennes proportionnelles cherchées entre AD & AC.

DÉM 1.°. Le centre du Cercle ſe trouve néceſſairement au-dehors de la Parabole. Car AD étant le Paramètre (ſupp.), l'Ordonnée DL au Point D ſera égale à la Ligne AD (27). Or AD = OM (conſt.). Donc DL = OM. Mais DL > MT (10); donc OM > que l'Ordonnée MT au Point M. Ainſi le centre O du Cercle eſt au-dehors de la Parabole. Il y a donc une partie de ce Cercle au-dedans de cette Courbe (conſt.), & une autre partie au-dehors; ainſi il coupe néceſſairement la Parabole en deux Points; l'un en y entrant, & l'autre en ſortant.

2°. Je dis que AD. GS :: GS. AS :: AS. AC. Car abbaiſſant du centre O la Perpendiculaire OR ſur GS, on verra d'abord que RS = OM = AD eſt la moitié de AC. Ainſi 2 RS = AC. Mais 2 RS = RS + RH + HS = RS + GR + HS (étant clair que GR = RH) = GS + HS. Donc GS + HS = AC.

Mais par la nature du Cercle (287. *Inſt. T.* 2.) AS. GS :: HS. DS, ou AS — AD. Ainſi GS × HS = AS × AS — AS × AD; ou, en tranſpoſant, GS × HS + AS × AD = AS × AS: or (20) AS × AD = $\overline{GS}^2$; donc GS × HS + $\overline{GS}^2$ = AS × AS, c'eſt-à-dire $\overline{HS + GS} \times GS = \overline{AS}^2$; &, comme HS + GS = AC, ainſi qu'on l'a fait obſerver, on trouve que AC × GS = $\overline{AS}^2$; donc GS. AS :: AS. AC. Mais AD. GS :: GS. AS (20); donc enfin AD. GS :: GS. AS :: AS. AC. C. Q. F. D.

168. COROL. Par conſéquent $\overline{AD}^3$. $\overline{GS}^3$ :: AD. AC (257. *Inſt. T.* 2.) : mais AC = 2 AD (ſupp.); donc $\overline{GS}^3$ = 2 $\overline{AD}^3$; ce qui démontre que le cube $\overline{GS}^3$, fait ſur la première des deux moyennes proportionnelles GS, AS, entre AD & ſon double AC, eſt double du cube $\overline{AD}^3$ propoſé.

De

De l'Ellipſe.

* 1. PROPOS. I. Soit AMD (fig. 42.) une figure Curviligne, telle que les quarrés $\overline{BM}^2$ des Ordonnées BM, perpendiculaires ſur une de ſes cordes AD, ſoyent toujours égaux aux Rectangles correſpondans AB × BD des Segmens AB, BD, faits par ces perpendiculaires, je dis que cette figure eſt un Cercle, dont AD eſt le Diamètre.

DÉM. Soit C le milieu de AD; alors AB = AC − BC, & BD = AC + BC (à cauſe de CD = AC) donc, puiſque l'on a (ſupp.) $\overline{BM}^2$ = AB × BD, on aura $\overline{BM}^2$ = AC − BC × AC + BC = $\overline{AC}^2$ − $\overline{BC}^2$. Tirons préſentement CM. Il eſt clair que $\overline{BM}^2$ = $\overline{CM}^2$ − $\overline{BC}^2$. Ainſi $\overline{AC}^2$ − $\overline{BC}^2$ = $\overline{CM}^2$ − $\overline{BC}^2$; d'où l'on tire AC = CM; par conſéquent tout Point M du Périmètre de la Courbe eſt toujours à égale diſtance de C. La figure propoſée eſt donc un Cercle, dont AD eſt le Diamètre.

* 2. COROL. D'où il ſuit que les quarrés des Ordonnées GP, BM, au Cercle, ſont entr'eux comme les Rectangles correſpondans; c'eſt-à-dire, que $\overline{GP}^2$. $\overline{PM}^2$ :: AG × GD. AB × BD. Car (1) $\overline{GP}^2$ = AG × GD, & $\overline{PM}^2$ = AB × BD; donc $\overline{GP}^2$. $\overline{PM}^2$ :: AG × GD. AB × BD. [a]

3. REM. Afin de n'être pas obligés de donner dans des répétitions ennuyeuſes, on obſervera pour ce qui va ſuivre, que les Plans par leſquels nous allons couper le cône,

[a] La converſe du n°. 2. eſt fauſſe; c'eſt-à-dire que l'on ne peut pas conclure que des Ordonnées appartiennent à un Cercle de ce que leurs quarrés ſont entr'eux comme les Rectangles correſpondans; cette propriété pouvant convenir à l'ellipſe; ainſi que nous le verrons n°. 40.

ſeront toujours ſuppoſés perpendiculaires au Plan du Triangle ABC (fig. 43.) par l'Axe de ce Solide ; & que, quand il y en aura pluſieurs qui ſe couperont, leur commune Section LOM ſera perpendiculaire au Plan de ce Triangle, & par conſéquent à toutes les lignes tracées ſur ce Plan, qui paſſeront au Point O, où il eſt coupé par la commune Section LOM. Car tout cela a été démontré (n°. 2, 5 & 6 de la Parabole.)

4. DÉF. Quand les côtés AB, AC, (fig. 43.) d'un Triangle ABC par l'Axe d'un Cône ſcalène, ſont coupés par un Plan GLRM, de manière que la commune Section GR de ce Plan & du Triangle faſſe avec le côté AB l'Angle AGR = l'Angle ACB, que le Diamètre BC de la baſe fait avec l'autre côté AC, on dit que ces côtés ſont coupés *anti-parallèlement* à la Baſe, & que la coupe GR eſt une *Section anti-parallèle* ou *ſous-contraire*.

* 5. PROPOS. II. Si on coupe un Cône ſcalène *anti-parallèlement* à ſa Baſe, la ſurface GLRM qui en naîtra ſera un Cercle.

DÉM. Par un Point quelconque L de la ſurface *anti-parallèle*, faiſons paſſer un Plan, qui coupe le Cône parallèlement à la Baſe de ce ſolide ; afin d'avoir par là le Cercle DLPM parallèle à la Baſe du cône, ainſi que ſon Diamètre DP parallèle à BC (n°. 1. de la Parabole) ; & l'Angle DPA = BCA = AGR (ſupp.). De plus, comme on ſuppoſe la baſe du cône perpendiculaire au Plan du Triangle ABC, le Cercle DLPM ſera auſſi perpendiculaire à ce même Plan ; & par conſéquent la commune Section LOM des deux Plans GLRM, DLPM, ſera perpendiculaire aux Lignes DP, GR, tracées ſur ce Triangle ; & ainſi coupée par le milieu en O (122. *Inſt. T.* 1.). Or, à cauſe de l'*anti-parallèliſme*, les Triangles DOG, POR ſont ſemblables ; donc DO. OG :: OR. OP ; ainſi $OG \times OR = DO \times OP = \overline{OL}^2$ ou $\overline{OM}^2$ (289. *Inſt. T.* 2.) ; donc $OG \times OR = \overline{OL}^2$; & par conſéquent la ſurface GLRM eſt un Cercle (1).

* 6. PROPOS. III. Mais, ſi le Cône eſt coupé de manière que la Section LMTP (fig. 44.) ne ſoit ni parallèle ni anti-parallèle à la Baſe de ce ſolide; c'eſt-à-dire, que l'Angle ALT ſoit > ou < que l'Angle BCA, cette Coupe ne ſera pas un Cercle.

DÉM. Par le milieu O de LT, faiſons paſſer un Plan anti-parallèle à la Baſe BC; ce qui donnera le Cercle GMRP (5); par conſéquent PO = OM, & $\overline{PO}^2$ ou $\overline{OM}^2$ = OG × OR. Mais, ſi la figure LMTP étoit auſſi un Cercle, on auroit encore $\overline{OM}^2$ = LO × OT; donc LO × OT = GO × OR, ou LO. GO :: OR. OT; par conſéquent les Triangles GOL, ROT, ſeroient ſemblables (284. *Inſt. T.* 2.); donc les Angles OGL, OTR, oppoſés aux côtés homologues LO, OR, ſeroient égaux (283. *Inſt. T.* 2.); donc l'Angle LTA égaleroit RGA = ACB (conſt.); ainſi LT ſeroit parallèle à BC; ce qui eſt contre la ſuppoſition; la figure LMTP ne peut donc pas être un Cercle.

7. REMARQ. On pouvoit faire paſſer par le Point O un Plan parallèle à la Baſe, au lieu de l'anti-parallèle dont nous avons fait uſage. Mais en ce cas la troiſième propoſition n'auroit pas été déduite de la deuxième, ce qui eſt un défaut, quand on peut faire autrement.

* 8. COROL. Puis donc que la figure LMTP n'eſt pas un Cercle, & que LT la traverſe par le milieu; (vu que les perpendiculaires MOP, abbaiſſées d'un Point quelconque M de ſon Périmètre ſur cette Ligne, ſe trouvent toujours coupées en deux parties égales) le Point O ne ſera pas également éloigné de tous les Points de ce Périmètre. Voyons donc de quel côté ſe trouve la plus longue dimenſion.

Cette queſtion renferme deux cas. Car la Section LT peut faire l'Angle TLA < ou > que l'Angle BCA, ou RGA fait par l'antiparallèle GR menée par le milieu O de LT. Dans le premier cas, c'eſt-à-dire, quand l'Angle TLA < RGA, la Ligne LT eſt plus grande que la Per-

pendiculaire MOP élevée ſur ſon milieu O ; & dans le deuxième cas, ou quand TLA > RGA, la Ligne LT eſt plus petite que MOP.

DÉM. Du premier cas. Après avoir tiré par le milieu O l'anti-parallèle GOR, (fig. 44) on mènera par ce même Point la parallèle DH ; & l'on obſervera que GR étant anti-parallèle (conſt.), l'Angle ODG du Triangle GOD eſt égal à l'Angle ORH du Triangle HOR ; mais ORH extérieur eſt plus grand que ſon intérieur OTR ; donc ODG > OTR ; on pourra donc prendre, dans l'Angle ODG ou ODL, un Angle ODS égal à l'Angle OTR ou OTH ; & alors DS coupera LT en un Point S, du côté de O par rapport à L ; ainſi OS < OL ou OT, & les Triangles ODS, OTH ſont ſemblables ; donc OS. DO : : OH. OT, ou OS × OT = DO × OH = $\overline{OM}^2$ ou $\overline{OP}^2$ (en ſuppoſant le Cercle dont DH eſt Diamètre ; parce qu'alors OM ſeroit la commune Section du Cercle & de la figure LMTP ; puiſqu'on ne ſçauroit élever, au Point O, qu'une ſeule perpendiculaire ſur le Plan du Triangle ABC) parconſéquent, OL × OT ou $\overline{OL}^2$ étant plus grand que OS × OT, il ſera auſſi plus grand que ſon égal $\overline{OM}^2$; donc OL > OM ; ainſi 2 OL ou LT > 2 OM ou MP. C. Q. F. 1°. D.

DÉM. Du ſecond cas, (fig. 45.) où l'Angle TLA > que l'Angle RGA de l'anti-parallèle RG, menée par le milieu O de LT. On tirera, comme ci-deſſus, la parallèle DOH à BC ; & l'on verra que l'Angle ODG = ORH ; mais ORH < OTH ; donc ODG ou ODL < OTH ; donc, en tirant DS juſqu'à la rencontre du prolongement TL, pour avoir l'Angle ODS = OTH ; la Ligne DS rencontrera néceſſairement OL, en un Point S de l'autre côté de O par rapport à L. Et l'on aura OS > OL, ainſi que les Triangles ſemblables ODS, OTH ; donc OD. OS : : OT. OH, ou OS × OT = OD × OH = $\overline{OM}^2$; mais OS × OT > OL × OT ou que $\overline{OL}^2$; donc $\overline{OM}^2$ > $\overline{OL}^2$, ou OM

$>$ OL ; ainſi 2 OM ou MP $>$ 2 OL ou LT. C. Q. F. 2°. D.

9. DÉFIN. Soit à préſent LMSTPL (fig. 46.) la Section d'un cône par un Plan, qui coupe les deux côtés AB, AC, du Triangle BAC par l'Axe de ce ſolide, ſans être parallèle ni anti-parallèle à la Baſe BC. On a vu (6) que cette *coupe* n'étoit pas un Cercle, les Anciens l'ont appellée *Ellipſe* [*a*]; &, ſi l'on ſuppoſe que l'Angle ALT ſoit plus petit que celui de l'anti-parallèliſme, conformément aux conſtructions précédentes, LT ſera l'*Axe principal*, le *grand Axe* ou la plus grande dimenſion de l'Ellipſe (8). Toute Ligne OS ou *r*M, abbaiſſée d'un Point quelconque du Périmètre de cette figure perpendiculairement ſur LT, eſt une *Ordonnée* à cet Axe; les Portions OT, OL, de l'Axe, déterminées par la rencontre d'une Ordonnée OS, ſont nommées *Segmens*; la perpendiculaire ID élevée ſur le milieu K de LT, s'appelle le *petit Axe*, ou l'Axe *conjugué* [*b*] à l'Axe LT. Toute Ligne, abbaiſſée d'un Point quelconque du Périmètre de la figure perpendiculairement ſur ID eſt *Ordonnée* au petit Axe, & les parties du petit Axe, déterminées par cette Ordonnée, en ſont les *Segmens*.

10. PROP. IV. Dans une *Ellipſe*; c'eſt-à-dire, dans une Section de cône telle que LMSTPL, qui n'eſt pas un Cercle (6), les quarrés $\overline{OS}^2$, $\overline{rM}^2$, des Ordonnées OS, *r*M, à l'Axe LT, ſont entr'eux comme les Rectangles des Segmens de cet Axe, correſpondans à chaque Ordonnée; c'eſt-à-dire, que $\overline{OS}^2 . \overline{rM}^2 :: OT \times OL . rL \times rT$ (fig. 46.)

DÉM. Par deux Points quelconques S, M, du Périmètre de cette figure, faiſons paſſer des Plans, qui coupent le cône parallèlement à ſa Baſe, ils y formeront des Cercles; ainſi $\overline{OS}^2 = OR \times OQ$, & $\overline{rM}^2 = rF \times rG$ (289. *Inſt. T.* 2.) Conſidérons maintenant les Triangles ſemblables LRO, LF*r*; nous aurons OR. *r*F :: OL. *r*L; & les Triangles ſem-

[*a*] On en verra la raiſon au n°. 12.

[*b*] La raiſon de cette dénomination ſera expliquée n°. 21.

blables TOQ, TrG, donneront OQ. rG :: OT. rT. donc, en multipliant par ordre les termes de ces deux proportions, nous trouverons celle-ci OR × OQ. rF × rG :: OL × OT. rL × rT. dans laquelle mettant $\overline{OS}^2$ au lieu de OR × OQ, & $\overline{rM}^2$ en la place de rF × rG, elle deviendra $\overline{OS}^2$. $\overline{rM}^2$ :: OL × OT. rL × rT C. Q. F. D.

11. Mais, si l'on trouvoit que les quarrés des Ordonnées ou des perpendiculaires OS, rM, à une Ligne LT, sont entr'eux comme les Rectangles des Segmens correspondans, il n'en faudroit pas conclure que les extrémités, S, M, de ces perpendiculaires sont à une *Ellipse*, puisque la même propriété convient au Cercle (2). c'est pourquoi la converse de cette proposition est fausse [a].

12. PROPOS. V. Le quarré $\overline{OS}^2$ d'une Ordonnée quelconque OS au grand Axe LT, est au Rectangle OT × OL des Segmens correspondans OT, OL, comme le quarré du petit Axe est au quarré du grand Axe, ou comme le quarré de la moitié du petit Axe est au quarré de la moitié du grand; c'est-à-dire, que $\overline{OS}^2$. OT × OL :: $\overline{KD}^2$. $\overline{KT}^2$.

DÉM. KD étant une Ordonnée, il s'ensuit (10.) que $\overline{OS}^2$. $\overline{KD}^2$ :: OT × OL. KT × KL ou $\overline{KT}^2$; donc, en alternant, $\overline{OS}^2$. OT × OL :: $\overline{KD}^2$. $\overline{KT}^2$. C. Q. F. D.

13. REMARQ. Je crois que l'on me dispensera de prouver, que le Périmètre de l'*Ellipse* est une courbe: & comme elle se trouve décrite sur un Plan, recherchons en les autres propriétés indépendamment du solide, où elle a pris naissance; mais toujours en déduisant ce qui va suivre immédiatement de ce qui précède.

14. COROL. I. Considérons donc la fig. 47, dont AB

[a] Mais elle sera vraie, si l'on suppose ou si l'on sçait d'ailleurs, que le quarré d'une Ordonnée quelconque n'est pas égal au Rectangle des Segmens de l'Axe, faits par la rencontre de cette Ordonnée.

est l'*Axe principal*; CD *le petit Axe*; G le *centre* de l'*Ellipse*; MP une *Ordonnée* quelconque au grand Axe. En ce cas, toute portion GP de cet Axe, comprise entre le centre G & l'extrémité P d'une Ordonnée MP, est appellée *Abciſſe*. Soit donc AB $= 2a$; AG ou GB $= a$, CD $= 2b$; CG ou GD $= b$; MP $= y$; GP $= x$; on aura AP $= a - x$, & PB $= a + x$; donc AP $\times$ PB $= a - x \times a + x = aa - xx$.

Ainsi, en exprimant analytiquement la propriété de l'Ellipse, que l'on a déterminée dans la Propoſ. V. (12), on aura yy ($\overline{MP}^2$). $aa - xx$ (AP $\times$ PB) :: bb ($\overline{CG}^2$). aa (AG $\times$ GB ou $\overline{GB}^2$). D'où l'on tire $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$; équation qui convient à tous les Points de cette Courbe rapportés à ſon Axe principal; & par laquelle elle eſt différenciée du Cercle. Parce que dans cette dernière figure, les Axes ou les Diamètres étant égaux, $a = b$. Donc l'équation précédente devient, pour le Cercle, $aa - xx = yy$.

15. COROL. II. Puiſque $\overline{MP}^2$. AP $\times$ PB :: $\overline{CG}^2$. $\overline{GB}^2$, & que CG $<$ GB, on voit que $\overline{MP}^2 <$ AP $\times$ PB; c'eſt-à-dire que le quarré d'une Ordonnée à l'Axe principal d'une Ellipſe, eſt plus petit que le Rectangle des Segmens correſpondans de cet Axe. Ce qui conſtitue une autre différence entre cette Courbe & le Cercle: car, dans celui-ci, le quarré de l'Ordonnée eſt égal au Rectangle des Segmens correſpondans.

16. COROL. III. L'expreſſion du quarré de l'Abciſſe $xx = \frac{aabb - aayy}{bb}$. Car, puiſque (14) l'on a $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, en faiſant paſſer le terme $- xx$ du premier membre dans le ſecond, & le terme $\frac{aayy}{bb}$ du ſecond dans le pre-

mier, on aura $aa - \frac{aayy}{bb}$, ou $\frac{aabb - aayy}{bb} = xx$.

17. COROLAIRE IV. Le quarré de l'Ordonnée $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$. Pour le voir, on n'a qu'à multiplier par bb les deux termes de l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, & l'on aura $aabb - bbxx = aayy$; donc $\frac{aabb - bbxx}{aa} = yy$.

18. COROL. V. Supposant toujours l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, il est évident que, si l'Abciſſe x augmente, il faut que l'Ordonnée y diminue; puiſque x augmentant, xx augmentera; & par conſéquent le membre $aa - xx$ diminuera; à cauſe qu'on ôtera du quarré aa une plus grande quantité xx: mais le membre $aa - xx$ devenant plus petit, ſon égal $\frac{aayy}{bb}$ doit le devenir auſſi; or ce ſecond membre ne peut pas diminuer par la Fraction $\frac{aa}{bb}$, qui eſt une grandeur conſtante; ce ſera donc par le quarré yy: ainſi les Abciſſes augmentant, les Ordonnées diminuent; c'eſt-à-dire, que les Ordonnées de l'Ellipſe diminuent en s'éloignant du centre. Donc la moitié du petit Axe eſt la plus grande Ordonnée à l'Axe principal; & les deux extrémités C, D, du petit Axe, déterminent la plus grande largeur de l'*Ellipſe*.

19. COROL. VI. D'où il ſuit qu'une Perpendiculaire DQ à l'une ou l'autre extrémité D du petit Axe, ne touche la Courbe qu'au ſeul Point D. Car DQ étant parallèle au grand Axe AB (conſt.), ſi elle rencontroit la Courbe en un autre Point H; en abbaiſſant de ce Point l'Ordonnée HK, on auroit HK = DG; c'eſt-à-dire que les Ordonnées ne diminueroient pas, à meſure qu'elles s'éloignent du centre. Ce qui eſt abſurde (18).

20. COROL. VII. D'un Point quelconque M abbaiſſons, ſur le petit Axe, la Perpendiculaire ou l'Ordonnée MR = GP = x; alors RG = MP = y; CR = CG — RG = $b - y$; RD = GD + RG = $b + y$. Ainſi CR × RD = $bb - yy$: mais (16) $\frac{aabb - aayy}{bb} = xx$, ou $xx \times bb = \overline{bb - yy} \times aa$; donc $bb - yy = \frac{bbxx}{aa}$, ou encore xx, $bb - yy$ :: aa. bb; c'eſt-à-dire $\overline{MR}^2$. CR × RD :: $\overline{AG}^2$. $\overline{CG}^2$.

21. COROL. VIII. L'Ellipſe a donc la même propriété, ſoit qu'on prenne les Ordonnées au grand Axe, ſoit qu'on les prenne au petit; & c'eſt la raiſon pour laquelle on appelle ces Axes *conjugués* l'un à l'autre; du Latin *conjugatus* conjugué; c'eſt-à-dire qui a de l'affinité, ou qui fait des fonctions ſemblables. On en concluera donc, comme au n°. 18, que les Abciſſes y du petit Axe augmentant, les Ordonnées x diminueront; que la moitié du grand Axe eſt la plus grande Ordonnée au petit Axe, & que les deux extrêmités A, B, déterminent la plus grande longueur de l'Ellipſe: mais qu'au contraire du Coroll. II. (15.) le quarré d'une Ordonnée au petit Axe, eſt plus grand que le Rectangle des Segmens correſpondans de cet Axe; puiſque dans la proportion xx. $bb - yy$ :: aa. bb du n°. 20, aa étant > bb, il eſt néceſſaire que xx ſoit auſſi plus grand que $bb - yy$, ou que $\overline{MR}^2 >$ CR × RD. Ce qui eſt une autre différence de l'Ellipſe au Cercle.

22. COROL. IX. De ce que les Ordonnées au petit Axe diminuent, à meſure qu'elles s'éloignent du centre, il s'enſuit qu'une Perpendiculaire AV, à l'une ou l'autre extrêmité du grand Axe, ne touche la Courbe qu'au ſeul Point A: puiſque, ſi elle la touchoit en quelqu'autre Point T, en menant de ce Point une Ordonnée TN au petit Axe, auquel la Perpendiculaire AV eſt parallèle (conſt.), on auroit TN = AG; c'eſt-à-dire que les Ordonnées au petit Axe

ne diminueroient pas, à meſure qu'elles s'éloignent du centre. Ce qui eſt contraire au n°. 21.

23. COROL. X. Quand les Abciſſes GP, GS, (fig. 48.) ſont égales, les Ordonnées correſpondantes PV, SK, le ſont auſſi. Car, en conſervant les dénominations précédentes, & faiſant GS = t, SK = z, l'on aura (16) $xx = \frac{aabb - aayy}{bb}$, & par la même raiſon $tt = \frac{aabb - aazz}{bb}$: ainſi, puiſque (ſupp.) GP = GS, ou $x = t$, on aura $xx = tt$, & par conſéquent $\frac{aabb - aayy}{bb} = \frac{aabb - aazz}{bb}$; donc (en multipliant par bb; ôtant enſuite $aabb$ de part & d'autre, & diviſant les deux reſtes par aa) l'on aura, en tranſpoſant, $zz = yy$, ou $z = y$; c'eſt-à-dire SK = PV.

24. Réciproquement, les Ordonnées SK, PV, étant égales, les Abciſſes GS, GP, correſpondantes le ſeront auſſi. Pour s'en convaincre, il faut ſe rappeller que (17) $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$, & pareillement que $zz = \frac{aabb - bbtt}{aa}$; donc y étant = z (ſupp.), yy ſera = zz, & par conſéquent $\frac{aabb - bbxx}{aa} = \frac{aabb - bbtt}{aa}$; d'où l'on tirera, comme au n°. 23. $x = t$, ou GP = GS.

25. COROL. XI. Par conſéquent, en joignant les extrémités V, K, de deux Ordonnées quelconques égales PV, SK, par la Ligne VK, cette Ligne paſſera par le centre G, & y ſera coupée en deux parties égales. Car il eſt évident que les Triangles-Rectangles GPV, GSK, ſont équiangles; donc PV. SK :: GP. GS :: GV. GK. Or PV = SK (ſupp.), donc GP = GS, & GV = GK; c'eſt-à-dire que la diſtance PS des Ordonnées égales, eſt coupée en deux également par la Ligne VK; mais le centre de l'Ellipſe coupe auſſi en deux parties égales cette même diſtance (24); donc G en eſt le centre. Ainſi toute Ligne VGK, laquelle paſſant par le centre G de l'Ellipſe, ſe termine à deux Points de cette Courbe, eſt diviſée en deux parties égales au Point G;

c'eſt pourquoi toute Ligne ſemblable à VGK a été appellée *Diamètre*.

26. Réciproquement, ſi des extrêmités V, K, d'un Diamètre, on abbaiſſe les Ordonnées VP, KS, elles ſeront égales entr'elles, & les Abciſſes correſpondantes GP, GS, le ſeront auſſi. Car les Triangles ſemblables GPV, GSK donnent VG. GK :: VP. KS :: GP. GS; or VG = GK (25), parce que VGK eſt un Diamètre (ſupp.); donc VP = KS, & GP = GS.

* 27. COROL. XII. Puiſque les Ordonnées à égale diſtance du centre ſont égales (23), l'Ellipſe n'eſt pas plus groſſe ou plus évaſée vers ſon extrêmité inférieure L (fig. 46.), que vers ſon extrêmité ſupérieure T; quoique le Cône ſoit plus grêle ou plus mince en T qu'en L [*a*].

* 28. COROL. XIII. Si l'on fait AB. CD :: CD eſt à un troiſiéme terme *p* (fig. 47.), ou $2a.\ 2b. :: 2b. \frac{4bb}{2a} = \frac{2bb}{a}$, on aura $p = \frac{2bb}{a}$; or ce troiſiéme proportionel *p* ainſi déterminé, eſt ce que l'on nomme le *Paramètre* du premier terme AB de la proportion, ou le *Paramètre* du grand Axe: cela poſé, l'on trouvera que le Rectangle AP × PB de deux Segmens quelconques du grand Axe eſt au quarré $\overline{PM}^2$ de l'Ordonnée correſpondante, comme le grand Axe AB eſt au *Paramètre p*; c'eſt-à-dire qu'en faiſant $2a.\ 2b :: 2b.p$, on aura $aa - xx$ (AP × PB). yy ($\overline{PM}^2$) :: 2*a* (AB) *p*.

DÉM. Puiſque $2a.\ 2b :: 2b.\ p$ (ſupp.), on aura $4aa.$

[*a*] Cette conſidération eſt fort propre à nous rendre retenus dans nos jugemens. Quand on coupe un Cône en baudrier, ou de haut en bas; enſorte qu'il en naiſſe une Section LSTPL, comme celle de la fig. 46, on juge d'abord que cette eſpèce d'ovale doit avoir une forme de poire ou de cloche, parce que le Cône va toujours en groſſiſſant de haut en bas. Cela eſt pourtant très-faux, indépendamment de la théorie. On n'a qu'à couper un Cône réel, ainſi qu'on l'indique ici, & la Démonſtration s'en ſera à l'œil.

$4bb :: 2a.p$ (256. *Inſt. T.* 2.); donc $\frac{4aa}{4bb}$ ou $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$.

Ainſi dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, trouvée n°. 14. en mettant $\frac{2a}{p}$ au lieu de $\frac{aa}{bb}$, elle deviendra $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$, ou $aa - xx \times p = 2a \times yy$, d'où l'on tirera $aa - xx.yy :: 2a.p$.

* 29. COROL. XIV. Pareillement, en faiſant CD. AB :: AB eſt à un troiſiéme terme m, nommé *Paramètre* du petit Axe CD, on trouvera que le Rectangle CR × RD de deux Segmens quelconques du petit Axe, eſt au quarré $\overline{MR}^2$ de l'Ordonnée correſpondante, comme le petit Axe CD eſt au Paramètre m. Que l'on faſſe donc $2b.2a :: 2a.m$, & l'on aura CR × RD $(bb - yy)$. $\overline{MR}^2$ $(xx) ::$ CD $(2b).m$.

Pour le voir, il n'y a qu'à répéter la Démonſt. du n°. 28. en diſant, puiſque $2b.2a :: 2a.m$. On aura $4bb.4aa :: 2b.m$, ou $\frac{bb}{aa} = \frac{2b}{m}$; donc l'équation $bb - yy = \frac{bbxx}{aa}$, trouvée n°. 20. deviendra $bb - yy = \frac{2bxx}{m}$, ou $bb - yy \times m = 2b \times xx$; d'où l'on tire $bb - yy.xx :: 2b.m$.

* 30. REM. L'équation $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$ (28), ou $bb - yy = \frac{2bxx}{m}$ (29) s'appelle l'équation de l'Ellipſe par rapport au *Paramètre*, parce qu'elle peut ſervir, ainſi que l'équation aux Axes, à décrire la Courbe & à en découvrir les propriétés. Elle eſt même plus ſimple, parce que $\frac{2a}{p}$ eſt un rapport de Lignes ſubſtitué à l'expreſſion $\frac{aa}{bb}$, qui eſt un rapport de quarrés.

* 31. COROL. XV. Le quarré $\overline{PM}^2$ de l'Ordonnée au grand Axe, eſt plus petit que le Rectangle du Segment AP par le *Paramètre p* de cet Axe.

DÉMONST. On a vû (n°. 28.) que ce Paramètre $p = \frac{2bb}{a}$; or on ſçait que $GP = x$, & que $AP = a - x$. Il faut donc prouver que $\overline{PM}^2 < AP \times p$, ou que $yy < \overline{a-x} \times p$, ou enfin que $yy < \overline{a-x} \times \frac{2bb}{a}$. Pour cela rappellons nous que $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (17), & nous aurons $\overline{PM}^2$. $AP \times p :: \frac{aabb - bbxx}{aa} . \overline{a-x} \times \frac{2bb}{a} ::$ (en diviſant les deux derniers termes par $\frac{bb}{a}$) $\frac{aa - xx}{a} . \overline{a-x} \times 2 ::$ (en diviſant encore par $a - x$) $\frac{a+x}{a}$. 2, ou (en multipliant par a) $:: a + x . 2a$. Donc $\overline{PM}^2 . AP \times p :: a + x . 2a$, ou $::$ BP. BA; mais BP $<$ BA; donc $\overline{PM}^2 < AP \times p$. C. Q. F. D.

* 32. REM. C'eſt ce défaut d'égalité du quarré $\overline{PM}^2$ de l'Ordonnée PM, avec le Rectangle AP $\times p$ du Segment AP par le Paramètre, qui a fait que les anciens Géomètres ont appellé cette Courbe une *Ellipſe*; car le Grec *Elleipſis*, d'où le mot *Ellipſe* eſt évidemment dérivé, ſignifie *défaut*.

33. PROPOS. VI. Si avec le rayon $AG = a$, & de l'extrêmité C ou D du petit Axe, priſe comme centre, on marque ſur le grand Axe les Points F, f; & que de ces Points ainſi déterminés, l'on mène à un même Point quelconque de la courbe elliptique les Lignes FM, fM, leur ſomme FM + Mf ſera toujours égale au grand Axe AB $= 2a$. (fig. 47.).

DÉM. Soit appellée c la diſtance GF ou Gf des Points

F, f, au centre G, & rappellons nous la cinquiéme Prop. (12) qui a donné $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ (14), d'où l'on a tiré $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (17). Remarquons auſſi qu'en tirant CF = AG = a, le Triangle-Rectangle FGC donne $\overline{FG}^2 = \overline{FC}^2 - \overline{CG}^2$, ou $cc = aa - bb$ [a]; & que du Point M abbaiſſant l'Ordonnée PM, nous aurons FP = FG − GP = $c - x$; ainſi $\overline{FP}^2 = cc - 2cx + xx$; & P$f$ = fG + GP = $c + x$, donc $\overline{Pf}^2 = cc + 2cx + xx$; par conſéquent $\overline{FM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{FP}^2$ ſera = $yy + cc + 2cx + xx$; donc (en ſubſtituant dans cette équation les valeurs de cc & de yy) on trouvera $\overline{FM}^2 = \frac{aabb - bbxx}{aa} + aa - bb - 2cx + xx$ ou (en réduiſant à la même dénom.) $\overline{FM}^2 = \frac{aabb - bbxx + a^4 - aabb - 2a^2cx + aaxx}{aa}$ = $\frac{a^4 - 2a^2cx + aaxx - bbxx}{aa}$; donc (en mettant cc, en la place de $aa - bb$ qui multiplie xx) $\overline{FM}^2 = \frac{a^4 - 2a^2cx + ccxx}{aa}$; & par conſéquent (en extrayant la Racine quarrée) FM = $\frac{aa - cc}{a}$.

---

[a] Puiſque $cc = aa - bb$; on aura $bb = aa - cc = a - c \times a + c$. Or $a - c$ = AG − GF = AF, & $a + c$ = GB + GF = FB; d'où l'on voit que bb ou $\overline{CG}^2$ = AF × FB. Ou encore AF = $\frac{\overline{CG}^2}{FB}$.

Pareillement $\overrightarrow{fM} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{Pf} = yy + cc + 2cx + xx =$ (en faiſant les mêmes ſubſtitutions que ci-deſſus) $\frac{aabb - bbxx + a^4 - aabb + 2a^2cx + a^2x^2}{aa} =$ $\frac{a^4 + 2a^2cx + a^2x^2 - b^2x^2}{aa} =$ (en remettant cc en la place de $a^2 - b^2$ qui multiplie xx) $\frac{a^4 + 2a^2cx + ccxx}{aa}$; ainſi (en tirant la Racine quarrée) $fM = \frac{aa + cx}{a}$.

Par conſéquent $FM + fM = \frac{aa - cx}{a} + \frac{aa + cx}{a} = \frac{2aa}{a} = 2a$. C. Q. F. D.

34. Corol. I. D'où il ſuit qu'en menant par un Point quelconque M (fig. 49.) de la courbe, une Ligne fM prolongée juſqu'à ce que $MP = MF$, & tirant PF, ſi l'on mène, par le milieu L de cette Ligne & par le Point donné M, une autre Ligne OLMS, elle ſera Tangente en M.

Dém. Il s'agit uniquement de prouver que OLMS ne touche la courbe qu'au ſeul Point M. Or (conſt.) OLMS eſt perpendiculaire ſur le milieu de PF; donc, ſi elle rencontroit la courbe en quelqu'autre Point Q, on auroit $QP = QF$; ainſi $fQ + QP = fQ + QF = 2a$ ou AB (33); mais $fM + MF =$ auſſi $2a$ (33), $= fM + MP$ (conſt.); donc $fQ + QP = fM + MP = fP$; c'eſt-à-dire, qu'une Ligne droite fP ſeroit égale à une Ligne courbe fQP compriſe entre les mêmes extrémités P, f, ce qui eſt abſurde; donc, &c.

35. Corol. II. L'Angle $FMO = fMS$. Car $FMO = PMO$ (conſt.) $= fMS$ ſon oppoſé au Sommet; donc $FMO = fMS$; c'eſt-à-dire, qu'en tirant des Points, F, f, les Lignes FM, fM, à un même Point M, l'Angle qu'elles forment avec la Tangente en ce Point, ſera égal de part & d'autre.

36. COROL. III. Par conſéquent, ſi l'on mettoit à l'un des Points F un corps lumineux, ou en feu, tous les rayons portés à la circonférence de la courbe, ſeroient réfléchis ou renvoyés à l'autre Point *f*: ces rayons ne pouvant pas faire l'Angle de réfléxion égal à l'Angle d'incidence, ſans paſſer par *f*. C'eſt pourquoi les Points F, *f*, déterminés comme dans la conſt. de la Propoſition VI. (33), ſont nommés *Foyers*.

Cette propriété de l'Ellipſe eſt très-célèbre. Nous en ferons uſage, quand il s'agira d'appliquer cette courbe à la pratique des Arts.

* 37. I. La diſtance AF (figure 47.) de l'un des *Foyers* F d'une Ellipſe, à l'extrêmité A de l'Axe la plus proche, eſt plus grande que le quart du Paramètre de cette Courbe : c'eſt-à-dire que $AF > \frac{p}{4}$.

DÉM. $AF = \frac{\overline{CG}^2}{FB}$ (note du n°. 33.); & $p = \frac{4bb}{2a}$ (28); donc $\frac{p}{4} = \frac{bb}{2a} = \frac{\overline{CG}^2}{AB}$. Or il eſt évident que $\frac{\overline{CG}^2}{FB} > \frac{\overline{CG}^2}{AB}$; puiſque $FB < AB$; donc auſſi $AF > \frac{p}{4}$.

* 37. II. COROL. IV. Si par le centre G d'une Ellipſe, (fig. 49.) on tire une parallèle NV à une Tangente quelconque HR, cette parallèle retranchera de la Ligne FK, (menée du Foyer le plus éloigné F au Point K de contingence,) une Portion TK égale à la moitié du grand Axe; c'eſt-à-dire, que $TK = a$ ou $\frac{AB}{2}$.

DÉM. De l'autre *Foyer f* menant *fe* parallèle à NV, l'on aura l'Angle $Kef = KTV = HKT$ ſon alterne $= fKR$ (35) $= efK$ ſon alterne (conſt.); ainſi l'Angle $Kef = efK$; donc $Ke = Kf$, & $Fe = FK - Ke = FK - Kf$. De plus FG étant $= Gf$, $FT = Te$, ou $Te = \frac{Fe}{2} = \frac{FK - Kf}{2}$ (puiſque $Fe = FK - Kf$); donc $Te + eK = \frac{FK - Kf}{2} + Kf$ (à cauſe que $Kf = eK$); c'eſt-à-dire que $TK = \frac{FK + Kf}{2} = \frac{AB}{2}$ (33). C. Q. F. D.

38. COROL. V. Il eſt clair qu'en élevant la perpendiculaire M*d* au Point M de contingence, cette perpendiculaire ne paſſera pas par le centre G; puiſque M*d* & FP étant (conſt.) perpendiculaires ſur la Tangente OS, les Triangles

gles ſemblables fPF, fMd donnent fM. MP ou MF :: fd. dF; mais $fM > MF$; donc $fd > dF$. Le Point d de la perpendiculaire Md à la courbe, n'eſt donc pas au centre de l'Ellipſe. Ainſi voilà encore une autre différence entre l'Ellipſe & le Cercle, dans lequel toute Ligne perpendiculaire à la circonférence paſſe néceſſairement par le centre.

39. COROL. VI. On voit donc que toute Ligne MG, menée d'un Point de contingence M au centre G de l'Ellipſe, fait avec la Tangente un Angle oblique GMO (on ſuppoſe que le Point de contingence n'eſt pas une des extrémités de l'un ou de l'autre Axe); & que l'Angle FMf eſt coupé en deux parties égales par la perpendiculaire Md.

40. Réciproquement, ſi l'Angle FMf eſt coupé en deux parties égales par la Ligne Md, je dis 1°. que cette Ligne eſt perpendiculaire ſur la Tangente OS au Point M. 2°. Que la perpendiculaire OS à l'extrémité M de cette même Ligne Md, eſt néceſſairement Tangente à l'Ellipſe au Point M.

DÉM. 1°. $dMF = dMf$ (ſupp.), & $FMO = fMS$ (35); donc $dMO = dMS$; ainſi Md eſt perpendiculaire ſur OS.

2°. Puiſque l'Angle $dMO = dMF + FMO = dMf + fMS$, & que $dMF = dMf$ (ſupp.) l'Angle $FMO = fMS = PMO$ ſon oppoſé au Sommet; donc $FMO = PMO$; ainſi, en faiſant le prolongement $MP = MF$ & tirant PF, l'Angle $MPL = MFL$, & l'Angle $MLP = MLF$; c'eſt-à-dire, que OS eſt perpendiculaire ſur la Baſe PF du Triangle iſoſcèle PMF; elle paſſe donc par le milieu L de cette Baſe, & par conſéquent elle eſt Tangente au Point M (34).

*41. COROL. VII. Tirons une Ligne quelconque DM, (fig. K.) parallèlement au grand Axe AB d'une Ellipſe; du Point M où elle rencontre le Périmètre de cette courbe, menons aux Foyers F, f, les Lignes MF, Mf; coupons l'Angle FMf en deux parties égales par l'indéfinie LH, laquelle ſera perpendiculaire à la courbe, ou à ſa Tangente CME au Point M (40); faiſons $MD = Mf$; alors, ſi de

Points D, *f*, on abbaiſſe les perpendiculaires DL, *f*H, ſur LH, elles ſeront entr'elles comme le grand Axe eſt à la diſtance des Foyers; c'eſt-à-dire, que DL. *f*H :: AB. F*f*.

DEM. DM étant parallèle à AT (ſupp.), l'Angle DML = ATM; donc abbaiſſant la perpendiculaire MP, les Triangles-Rectangles DLM, MPT, ſont Équiangles; ainſi DL. MP :: MD ou M*f*. MT. Or, ſi l'on abbaiſſe la perpendiculaire TS ſur M*f*, les Triangles-Rectangles *f*HM, MST, ayant l'Angle commun *f*MH, ſont ſemblables; donc M*f*. MT :: *f*H. TS; donc DL. MP :: *f*H. TS, ou DL. *f*H :: MP. TS. :: *f*M. *f*T (parce que les Triangles-Rectangles *f*PM, *f*ST, ſont Equiangles.); mais, en prolongeant *f*M, juſqu'à ce que MO = MF, & tirant OF qui ſera perpendiculaire ſur la Tangente CE (Dém. du n°. 34.), & par conſéquent parallèle à MT ou à LH, qui eſt auſſi perpendiculaire ſur la même Ligne CE (conſt.) on aura *f*M. *f*T :: *f*O. F*f*; donc DL. *f*H :: *f*O. F*f* :: *f*M + MF. F*f* (parce que *f*O = *f*M + MF) :: AB. F*f* (car *f*M + MF = AB (33)); par conſéquent DL. *f*H :: AB. F*f*. C. Q. F. D.

Réciproquement, ſi l'on abbaiſſe la perpendiculaire *f*H ſur la Ligne LMH, qui coupe en deux parties égales un Angle quelconque FM*f*, formé par deux Lignes MF, M*f*, tirées d'un même Point M d'une Ellipſe à ſes deux *Foyers*; F, *f*; & qu'après avoir cherché une quatriéme proportionelle DL aux trois Lignes F*f*, AB, *f*H, l'on conſtruiſe au Point M ſur le prolongement de HM, un Triangle-Rectangle MDL, dont l'hypothénuſe = M*f* ou DM, & l'un des deux autres = DL, il arrivera que DM ſera parallèle à AB.

DÉM. DL. *f*H :: AB. F*f* (conſt.) :: *f*O. *f*F (parce que *f*O = AB (conſt. & n°. 33.)) :: *f*M. *f*T (à cauſe de MT parallèle à OF (conſt.)) :: DM. *f*T (puiſque DM = *f*M (conſt.)); ainſi DL. *f*H :: DM. *f*T, ou DL. DM :: *f*H *f*T; donc les Triangles-Rectangles DLM, *f*HT, ſont ſemblables (286 *Inſt. T.* 2.); ainſi l'Angle DML = *f*TH = ATM; donc les deux Lignes DM, AT ou AB, ſont

également inclinées sur la même Ligne LH ; & par conséquent elles sont parallèles. C. Q. F. D.

Il faut s'attacher à bien concevoir ce Corollaire & sa converse. Nous en ferons usage dans la Dioptrique.

* 42. COROL. VIII. Toute Tangente OS (fig. 49.) en quelque Point M de l'Ellipse, différent des extrémités des Axes, est nécessairement déterminée à rencontrer le grand Axe en quelque Point O. Car, si OS étoit parallèle à l'Axe AB, on auroit l'Angle $FfM = LMP = LMF$ (const.) $= MFf$ son alterne ; donc l'Angle FfM égaleroit l'Angle MFf ; donc Mf égaleroit MF ; ce qui est absurde. La Tangente OS n'est donc pas parallèle à l'Axe AB ; par conséquent elle le rencontre, ou est déterminée à le rencontrer en quelque Point O.

* 43. COROL. IX. La distance FA de l'un des Foyers F à l'extrémité A du grand Axe, la plus proche de ce Foyer, est plus grande que le quart du Paramètre de l'Axe principal AB de l'Ellipse.

Car $FA = AG - FG = a - c$, & le Paramètre $p = \frac{2bb}{a}$ (28), ainsi $\frac{p}{4} = \frac{2bb}{4a} = \frac{bb}{2a}$. Or $a - c$ (FA). $\frac{bb}{2a}$ :: (en multipliant les deux termes de ce rapport par $2a$) $2aa - 2ac$. bb :: (en mettant $aa - cc$ en la place de bb (noté du n°. 33.)) $2aa - 2ac$. $aa - cc$ :: (en divisant les deux derniers termes par $a - c$) $2a$. $a + c$; donc FA. $\frac{bb}{2a}$ ou $\frac{p}{4}$ :: $2a$. $a + c$, ou :: AB. BF ; mais AB > BF ; donc FA > $\frac{p}{4}$.

* 44. COROL. X. L'Ordonnée FN (fig. 48.) à l'un des Foyers F de l'Ellipse, est égale à $\frac{p}{2}$ moitié du Paramètre de l'Axe principal AB.

DÉM. Après s'être rappellé la cinquième Proposit. (12), on remarquera que $AF = AG - FG = a - c$, & $FB = a + c$. Ainsi $AF \times FB = a - c \times a + c = aa -$

$cc = bb$ (note du n°. 33.); on aura donc $\overline{FN}^2 (yy)$. AF × FB (bb) :: $\overline{CG}^2 (bb)$. $\overline{AG}^2 (aa)$ (n°. 12.); donc $\overline{FN}^2$ ou $yy = \frac{b^4}{aa}$; & par conſéquent $FN = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2}$ (28) C. Q. F. D.

* 45. PROPOS. VII. En ſuppoſant au Point de contingence M (fig. 50.) la Perpendiculaire Md à la Tangente OM, & abbaiſſant l'Ordonnée MP à l'Axe AB, on trouvera que l'expreſſion de la demi-différence des Lignes fM, FM, menées des Foyers à ce Point M, eſt $= \frac{cx}{a}$.

DÉM. Par la Prop. VI. (33) 2a étant la ſomme des Lignes fM, FM; ſi l'on appelle leur différence 2d, leur demi-différence ſera $= d$; ainſi fM $= a + d$, & FM $= a - d$ (*Inſt.* 103. *Alg. T.* 1.); donc $\overline{fM}^2 = aa + 2ad + dd$, & $\overline{FM}^2 = aa - 2ad + dd$. De plus FP $=$ FG $-$ GP $= c - x$, & Pf $=$ Gf $+$ GP $= c + x$; ainſi $\overline{FP}^2 = cc - 2cx + xx$, & $\overline{Pf}^2 = cc + 2cx + xx$. Cela ſuppoſé, il faut prouver que $d = \frac{cx}{a}$.

Conſidérons le Triangle-Rectangle FPM, nous aurons $\overline{FM}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{PM}^2$, ou $aa - 2ad + dd = cc - 2cx + xx + yy$ (A). Pareillement le Triangle-Rectangle fPM donnera $\overline{fM}^2 = \overline{Pf}^2 + \overline{PM}^2$, ou $aa + 2ad + dd = cc + 2cx + xx + yy$ (B); en ôtant donc le premier membre de l'équation A, du premier membre de l'équation B, & le ſecond membre du ſecond membre, on aura $4ad = 4cx$; d'où l'on tire $d = \frac{cx}{a}$. C. Q. F. D.

* 46. PROPOS. VIII. En faiſant le prolongement MV $=$ FM, on trouvera que FM ou MV $= \frac{aa - cx}{a}$.

Dém. Puiſque (Dém. du n°. 45.) FM ou MV $= a - d$, & que $d = \frac{cx}{a}$ (45), on aura FM ou MV $= a - \frac{cx}{a} = \frac{aa - cx}{a}$. C. Q. F. D.

* 47. Propos. IX. La diſtance F*d* du Foyer F au Point *d*, où la Perpendiculaire M*d* à la Tangente rencontre l'Axe, eſt $= \frac{a^2c - c^2x}{aa}$.

Dém. Ayant tiré FV, qui ſera néceſſairement Perpendiculaire ſur OM (Dém. du n°. 34.), les Triangles *f*M*d*, *f*VF ſeront ſemblables; donc *f*V. *f*F :: MV ou FM. F*d*; mais *f*V $= f$M $+$ FM $= 2a$ (33); *f*F $= 2c$; & MV ou FM $= \frac{aa - cx}{a}$ (46). Donc, en mettant ces valeurs analytiques dans la proportion précédente, elle deviendra $2a. 2c :: \frac{aa - cx}{a}$. F*d*; ainſi F*d* $= \frac{a^2c - c^2x}{aa}$. C. Q. F. D.

* 48. Propos. X. En ſuppoſant toujours la même conſtruction que ci-deſſus, on trouvera que l'expreſſion de la *ſous-Perpendiculaire* P*d* $= \frac{bbx}{aa}$.

Dém. On ſçait que FP $=$ FG $-$ GP $= c - x$, & F*d* $= \frac{a^2c - c^2x}{aa}$ (47). Or P*d* $=$ F*d* $-$ FP $= \frac{a^2c - c^2x}{aa} - c + x =$ (en réduiſant à la même dénomination, & ôtant ce qui ſe détruit) $\frac{aax - ccx}{aa}$; donc P*d* $= \frac{a^2x - c^2x}{aa}$; mais $a^2 - c^2 = bb$; donc P*d* $= \frac{bbx}{aa}$. C. Q. F. D.

* 49. Corol. Il s'enſuit que GP. P*d* :: $2a$. *p*. Car,

puiſque GP $= x$, & P$d = \frac{bbx}{aa}$ (48), on aura GP. Pd :: $x. \frac{bbx}{aa}$ :: $aax. bbx$ :: $aa. bb$ :: $2a. p$ (Dém. du n°. 28.). Donc GP. Pd :: $2a. p$. C. Q. F. D.

* 50. PROPOS. XI. L'expreſſion de la *ſous-Tangente* PO $= \frac{aa - xx}{x}$.

DÉM. Puiſque le Triangle OMd eſt Rectangle en M, & que MP eſt perpendiculaire ſur Od, on a Pd. PM :: PM. PO (291. *Inſt. T.* 2.) : or P$d = \frac{bbx}{aa}$ (48), & PM $= y$; donc $\frac{bbx}{aa}. y :: y.$ PO $= \frac{aayy}{bbx}$; mais $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (17); donc PO $= \frac{aa \times aabb - bbxx}{aa \times bbx} = \frac{aa - xx}{x}$. C. Q. F. D.

* 51. AUTRE *Démonſtration, tirée de la méthode générale de mener la Tangente des Courbes, expliquée au n°. 28 & 29 de la Parabole.* Si nous avions voulu nous diſpenſer, de ſuivre le fil des vérités que nous venons d'établir, nous aurions pû dès le commencement, & immédiatement après la Propoſition IV. (n°. 10), découvrir la valeur $\frac{aa - xx}{x}$ de la *ſous-Tangente* PO; comme nous allons le faire voir (fig. 50.).

Suppoſons donc qu'on veuille mener une Tangente au Point N de l'Ellipſe, il eſt évident qu'elle doit rencontrer l'Axe prolongé en quelque Point O (42) : ainſi, en abbaiſſant l'Ordonnée NP, il eſt clair que, ſi dans le Triangle-Rectangle NPO l'on peut déterminer le rapport de la *ſous-Tangente* PO à quelque grandeur connue, on aura la Tangente ON.

Pour cela, concevons d'abord que ON ſoit Sécante,

c'eſt-à-dire, qu'elle coupe la Courbe en deux Points N, Q, & que l'on ait tiré l'Ordonnée QT. Faiſons AG $= a$; GP $= x$; PT $= r$; GT $=$ GP $-$ PT $= x - r$; AP $= a - x$; PB $= a + x$; ainſi AP $\times$ PB $= aa - xx$. AT $=$ AG $-$ GP $+$ PT $= a - x + r$; TB $=$ PG $+$ GB $-$ PT $= a + x - r$; donc AT $\times$ TB $= a - x + r \times a + x - r = aa - xx + 2rx - rr$; PO $= s$; OT $=$ PO $+$ PT $= s + r$; ainſi $\overline{PO}^2 = ss$, & $\overline{OT}^2 = ss + 2rs + rr$.

Remarquons maintenant que par la quatriéme Propoſition (n°. 10) $\overline{QT}^2 . \overline{PN}^2 ::$ AT $\times$ TB. AP $\times$ PB; &, (à cauſe des Triangles ſemblables OTQ, OPN) $\overline{QT}^2 . \overline{PN}^2 :: \overline{OT}^2 . \overline{PO}^2$; donc AT $\times$ TB. AP $\times$ PB $:: \overline{OT}^2 . \overline{PO}^2$; c'eſt-à-dire (en ſubſtituant les grandeurs analytiques des termes de cette proportion) $aa - xx + 2rx - rr . aa - xx :: ss + 2rs + rr . ss$; ainſi (en ſouſtrayant) $2rx - rr . aa - xx :: 2rs + rr . ss$; donc (en faiſant le produit des Extrêmes & celui des Moyens) $2rs^2x - r^2s^2 = 2a^2rs - 2rsx^2 + a^2r^2 - r^2x^2$, ou (en diviſant par r) $2ssx - rss = 2a^2s - 2sx^2 + a^2r - rx^2$ (B), qui eſt l'équation où l'on parvient, lorſque la Ligne ONQ eſt Sécante; mais, en imaginant qu'elle tourne ſur le Point O, juſqu'à ce que les Points N, Q, ſe confondent; auquel cas elle ſera *Tangente*, QT deviendra NP, & la différence PT des Abciſſes s'évanouira; c'eſt-à-dire qu'alors $r = 0$; ce qui fera évanouir tous les termes où r ſe trouve dans l'équation B. Alors cette équation deviendra $2ssx = 2aas - 2sxx$. Donc (en diviſant par $2s$) $sx = aa - xx$; & par conſéquent s ou PO $= \frac{aa - xx}{x}$, comme au n°. 50.

* 52. Cor. I. Donc PO $\times x = aa - xx = a - x \times a + x$; ainſi $x . a - x :: a + x$. PO, ou GP. AP ::

BP. PO ; dans laquelle proportion les trois premiers termes ſont donnés, quand le Point M & l'Axe AB le ſont ; ce qui détermine PO, & par conſéquent ON.

* 53. Réciproquement, le Point N & l'Axe AB d'une Ellipſe étant donnés, ſi l'on fait GP. AP :: BP eſt à un quatriéme terme, que l'on portera de P en O pour tirer ON, je dis que cette Ligne ON ſera Tangente au Point N.

Car, ſi elle ne l'étoit pas, on pourroit donc mener au Point N une Tangente NS, qui tomberoit au-deſſus ou au-deſſous de ON ; & l'on auroit alors GP. AP :: BP. PS (52) ; puiſque, dans ce cas, PS ſeroit *ſous-Tangente* ; mais (ſupp.) GP. AP :: BP. PO ; donc PS égaleroit PO ; ce qui eſt abſurde.

On a donc par cette *Converſe* un ſecond moyen de mener une Tangente à un Point donné de l'Ellipſe, ſans avoir recours au n°. 54.

* 54. COROL. II. Si l'on ajoute GP $= x$ à PO $= \frac{aa - xx}{x}$ (50 & 51), on aura GP + PO $= x + \frac{aa - xx}{x} = \frac{xx + aa - xx}{a} = \frac{aa}{x}$; donc GO $= \frac{aa}{x}$, ou GO $\times x = a \times a$, ou GO $\times$ GP $=$ GA $\times$ GA ; donc GP. GA :: GA. GO ; ce qui eſt un troiſiéme moyen d'avoir la Tangente ON.

* 55. COROL. III. En ôtant GA $= a$ de GO $= \frac{aa}{x}$ (54), on aura GO — GA $= \frac{aa}{x} - a = \frac{aa - ax}{x}$ $= \overline{a - x} \times a$, ou AO $\times$ GP $=$ AP $\times$ GA ; donc GP. AP :: GA. AO ; quatriéme moyen d'avoir une Tangente au Point N.

* 56. COR. IV. Prolongeons le petit Axe DC, juſqu'à ce qu'il rencontre la Tangente OM en R ; & abbaiſſons

l'Ordonnée ML à cet Axe ; alors l'expreſſion de la *ſous-Tangente* LR $= \frac{bb - yy}{y}$.

DÉM. GL $=$ PM $= y$; & les Triangles ſemblables OGR, OPM, donnent GR. PM :: GO. OP : mais GO $= \frac{aa}{x}$ (54), & OP $= \frac{aa - xx}{x}$ (50 & 51) ; donc la proportion précédente devient GR. y :: $\frac{aa}{x}$. $\frac{aa - xx}{x}$; d'où l'on tire GR $= \frac{aay}{aa - xx}$; donc LR $=$ GR $-$ GL $= \frac{aay}{aa - xx} - y = \frac{aay - aay + yxx}{aa - xx}$ (en réduiſant à la même dénomination) $= \frac{yxx}{aa - xx}$; ainſi LR $= \frac{yxx}{aa - xx}$ (A) : mais $xx = \frac{aabb - aayy}{bb}$ (16) ; ſubſtituant donc cette valeur de xx dans l'équation A, elle devient LR $=$

$$\frac{\frac{aabby - aay^3}{bb}}{aa - \frac{aabb + aayy}{bb}} = \frac{\frac{aabby - aay^3}{bb}}{\frac{aabb - aabb + aayy}{bb}} =$$

$\frac{aabby - aay^3}{aayy} = \frac{bb - yy}{y}$ (en diviſant par aay) ; donc LR $= \frac{bb - yy}{y}$. C. Q. F. D.

* 57. COROL. V. Puiſque LR $= \frac{bb - yy}{y}$, on aura LR $\times y = bb - yy = \overline{b + y} \times b - y$; donc $y. b + y :: b - y.$ LR, ou GL. DL :: LC. LR. Ainſi, quand le Point M & le petit Axe ſont donnés ; en abbaiſſant l'Or-

donnée ML, la ſous-Tangente LR ſe trouve déterminée, & par conſéquent la Tangente MR.

* 58. COROL. VI. Si l'on ajoute $y = GL$ à la grandeur $\frac{bb-yy}{y}$, on aura $LR + GL = \frac{bb-yy}{y} + y = \frac{bb-yy+yy}{y} = \frac{bb}{y}$; donc $LR + GL$, c'eſt-à-dire $GR = \frac{bb}{y}$, ou $GR \times y = b \times b$; d'où l'on tire $y. b :: b. GR$, ou $GL. GC :: GC. GR$. Ce qui fournit un moyen d'avoir GR, & par conſéquent la Tangente MR.

* 59. COROL. VII. En ôtant $b = GC$ de $\frac{bb}{y} = GR$, on trouve $GR - GC = \frac{bb}{y} - b = \frac{bb-by}{y}$; donc $GR - GC$, c'eſt-à-dire $CR = \frac{bb-by}{y}$; ou $GR \times y = bb - by = b - y \times b$; ainſi $y. b :: b - y. CR$, ou $GL. GC :: LC. CR$; ce qui eſt un nouveau moyen d'avoir la Tangente MR.

60. REM. Tous ces Corollaires démontrent, que l'on peut ſe ſervir indifféremment du grand Axe ou du petit Axe, pour avoir une Tangente en un Point quelconque différent des extrémités de ces Axes. Car il eſt aiſé de démontrer la vérité des converſes de toutes ces propoſitions, ainſi que l'on a fait au n°. 53.

* 61. COR. VIII. [a] Aux extrémités du grand Axe AB (fig. 51.) élevons les perpendiculaires BQ, AS, terminées aux Points Q, S, par la Tangente OS au Point M;

[a] On peut paſſer depuis le n°. 61 juſqu'au n°. 66. excluſivement; cependant comme ces Corollaires ſont d'un très-grand uſage dans l'aſtronomie Phyſique, particulièrement pour l'intelligence du Livre de M. Sigorgne, & qu'on ne les trouve pas toujours démontrés avec une juſte étendue, je me ſuis appliqué à ne rien obmettre à cet égard, qui pût arrêter les Commençans.

& le produit de ces perpendiculaires ſera égal au quarré de la moitié du petit Axe ; c'eſt-à-dire, que $BQ \times AS = \overline{\frac{c}{2}}CG$.

Dém. Abbaiſſant l'Ordonnée $PM = y$, ſoit toujours $AG = GB = a$; $GP = x$; $OP = \frac{aa - xx}{x}$ (50 & 51); ainſi $OB = OP + GP - GB = \frac{aa - xx}{x} + x - a =$ (en réduiſant à la même dénomination ; & ôtant ce qui ſe détruit) $\frac{aa - ax}{x}$; donc $OB = \frac{aa - ax}{x}$. De même $OA = BA + OB = 2a + \frac{aa - ax}{x} = \frac{2ax + aa - ax}{x} = \frac{ax + aa}{x}$; donc $OA = \frac{ax + aa}{x}$; cela ſuppoſé.

Conſidérons les Triangles ſemblables OPM, OBQ, nous aurons OP. PM :: OB. BQ, ou (en ſubſtituant les valeurs analytiques) $\frac{aa - xx}{x}.y :: \frac{aa - ax}{x}.$ BQ ; donc (en diviſant les antécéd. par $\frac{a - x}{x}$, & en altern.) $a + x.$ $a :: y.$ BQ (M). Pareillement les Triangles ſemblables OPM, OAS, donnent OP. PM :: OA. AS, ou $\frac{aa - xx}{x}.$ $y :: \frac{ax + aa}{x}.$ AS ; donc (en diviſant les antécéd. par $\frac{a + x}{x}$, & en altern.) $a - x.$ $a :: y.$ AS (N). Ainſi (en multipliant par ordre les termes des deux propor. M, N) on aura $aa - xx.$ $aa :: yy.$ $BQ \times AS = \frac{aayy}{aa - xx}$ (T) ;

mais $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (17); donc (en ſubſtituant cette valeur de yy dans l'équation T) on trouvera $BQ \times AS = \frac{aa \times aa - xx \times bb}{aa \times aa - xx} = bb$; c'eſt-à-dire que $BQ \times AS = \overline{CG}^2$. C. Q. F. D.

* 62. COR. IX. Si des Foyers F, f, l'on tire des perpendiculaires FH, fh, ſur une Tangente à l'Ellipſe en un Point quelconque M, différent des extrémités des Axes; le produit de ces perpendiculaires ſera égal au quarré de la moitié du petit Axe, ou $fh \times FH = \overline{CG}^2$.

DÉM. Conſervant les mêmes dénominations que ci-deſſus; faiſant $Gf = GF = c$, & tirant $FC = a$ (n°. 33) pour avoir $cc = aa - bb$; on aura $Of = OP + GP - Gf = \frac{aa - xx}{x} + x - c = \frac{aa - cx}{x}$; ainſi $Of = \frac{aa - cx}{x}$, & $OF = OP + GP + GF = \frac{aa - xx}{x} + x + c = \frac{aa + cx}{x}$; donc $OF = \frac{aa + cx}{x}$. L'on a vû encore (61) que $OB = \frac{aa - ax}{x}$, & que $OA = \frac{aa + ax}{x}$.

Remarquons préſentement que les Triangles-Rectangles ſemblables Ohf, OBQ, donnent Of. OQ :: fh. BQ (S). pareillement les Triangles-Rectangles ſemblables OHF, OAS, donnent OF. OS :: FH. AS (T). donc (en multipliant par ordre les termes des deux proportions S, T) l'on aura $Of \times OF$. $OQ \times OS$ :: $fh \times FH$. $BQ \times AS$ (K); donc, ſi l'on démontre que $Of \times OF = OQ \times OS$, il ſera démontré que $fh \times FH = BQ \times AS$, & par conſéquent $= \overline{CG}^2$ (61.).

I. Or on a vû que $Of = \frac{aa - cx}{x}$, & $OF = \frac{aa + cx}{x}$; donc $Of \times OF = \frac{\overline{aa - cx}}{x} \times \frac{\overline{aa + cx}}{x} = \frac{a^4 - c^2x^2}{xx}$ = (en mettant $aa - bb$ au lieu de cc) $\frac{a^4 - aaxx + bbxx}{xx}$; par conséquent $Of \times OF = \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{xx}$.

II. Cherchons présentement les valeurs analytiques de OQ & de OS; & pour cela remarquons d'abord qu'à cause du Triangle-Rectangle OPM, $\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \frac{\overline{aa - xx}^2}{x^2} + yy$; donc $OM = \sqrt{\frac{\overline{aa - xx}^2}{x^2} + y^2}$. Or, en considérant les Triangles semblables OPM, OBQ, nous aurons OP. OM :: OB. OQ ou (en substituant les valeurs analytiques) $\frac{aa - xx}{x}$. $\sqrt{\frac{\overline{aa - xx}^2}{x^2} + y^2}$ :: $\frac{aa - ax}{x}$. OQ; donc (en divisant les antécéd. par $\frac{a - x}{x}$ & en alter.) $a + x$. a :: $\sqrt{\frac{\overline{aa - xx}^2}{x^2} + y^2}$. OQ (G). Pareillement les Triangles semblables OPM, OAS, donnent OP. OM :: OA. OS, ou $\frac{aa - xx}{x}$. $\sqrt{\frac{\overline{aa - xx}^2}{x^2} + yy}$ :: $\frac{aa + ax}{x}$. OS; donc (en divis. les antéced. par $\frac{a + x}{x}$, & en altern.) $a - x$. a :: $\sqrt{\frac{\overline{aa - xx}^2}{xx} + yy}$. OS (L); ainsi, (en multipliant par ordre les termes des équations G, L,) l'on aura

$aa - xx. aa :: \frac{\overline{aa-xx}}{xx} + yy.$ OQ × OS $=$

$\frac{\overline{aa-xx} \times \overline{aa-xx} \times aa}{xx} + \frac{aayy}{a^2-xx}$ (T). Or $yy = \frac{aabb-bbxx}{aa}$ (17) $= \overline{aa-xx} \times \frac{bb}{aa}$; donc (en ſubſtituant dans l'équation T, $\overline{aa-xx} \times \frac{bb}{aa}$ en la place de yy) on aura OQ × OS $= \frac{\overline{aa-xx} \times \overline{aa-xx} \times aa}{xx} + \frac{\overline{aa} \times \overline{aa-xx} \times \frac{bb}{aa}}{aa-xx} = \frac{\overline{aa-xx} \times aa}{xx} + bb = \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{xx}$. Donc OQ × OS $= \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{xx} =$ Of × OF (art. I.); ainſi (en reprenant la proportion K) on verra que fh × FH $=$ BQ × AS $= \overline{CG}^2$ (61). C. Q. F. D.

63. COR. X. A deux Points quelconques M, T, (fig. 52.) d'une Ellipſe, tirons deux Tangentes Hh, QR; & abbaiſſons d'un même Foyer F, les perpendiculaires FH, FR ſur ces Tangentes; je dis que ces perpendiculaires croîtront davantage, l'une par rapport à l'autre, que dans la raiſon des racines quarrées des rayons vecteurs FM, FT, tirés du Foyer F aux Points de contingence, M, T; c'eſt-à-dire, que FH eſt plus petite, par rapport à FR, que $\sqrt{FM}$ par rapport à $\sqrt{FT}$; il faut donc prouver que $\frac{FH}{FR} < \frac{\sqrt{FM}}{\sqrt{FT}}$.

DÉM. Abbaiſſons perpendiculairement de l'autre Foyer f, la Ligne fh ſur Hh, & fQ ſur QR : après quoi re-

marquons que les Triangles-Rectangles FHM, fhM, ſont ſemblables; puiſque l'Angle FMH = fMh (35): donc FM. FH :: $fM.fh$; ainſi $fh = \frac{FH \times fM}{FM}$; donc $fh \times FH = \frac{\overline{FH}^2 \times fM}{FM}$. Or (62) $fh \times FH = \overline{CG}^2$; ainſi $\frac{\overline{FH}^2 \times fM}{FM} = \overline{CG}^2$; & par conſéquent $\overline{FH}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FM}{fM}$.

On verra pareillement que, les Triangles-Rectangles FRT, FQT étant ſemblables (à cauſe de l'Angle FTR = fTQ (35)) FT. FR :: $fT.fQ = \frac{FR \times fT}{FT}$; donc $\frac{\overline{FR}^2 \times fT}{FT} = fQ \times FR = \overline{CG}^2$ (62); ainſi $\overline{FR}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FT}{fT}$; & par conſéquent $\overline{FH}^2$. $\overline{FR}^2 :: \frac{\overline{CG}^2 \times FM}{fM}. \frac{\overline{CG}^2 \times FT}{fT} :: \frac{FM}{fM}. \frac{FT}{fT}$. Ainſi $\frac{\overline{FH}^2}{\overline{FR}^2} = \frac{FM \times fT}{fM \times FT}$. Mais $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} < \frac{FM}{FT}$; car $\frac{FM \times fT}{fM \times FT}. \frac{FM}{FT} :: \frac{fT}{fM}$. 1. (en diviſ. les deux termes par $\frac{FM}{FT}$) :: $fT.fM$. Or $fT < fM$; donc auſſi $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} < \frac{FM}{FT}$; par conſéquent $\frac{\overline{FH}^2}{\overline{FR}^2} < \frac{FM}{FT}$; &, en extrayant les Racines quarrées, $\frac{FH}{FR} < \frac{\sqrt{FM}}{\sqrt{FT}}$. C. Q. F. D.

* 64. Cor. II. Si l'on ſuppoſe, ſuivant le Corollaire de la première Propoſition des *Principes* de *Newton*, que la viteſſe en M d'une Planète (fig. 51.) qui ſe meut dans une orbite Elliptique BMCA, autour du Foyer F, ſoit à ſa viteſſe en C, qui eſt ſa *diſtance moyenne* au Foyer F [*a*], comme la perpendiculaire FT, abbaiſſée de ce Foyer ſur la Tangente au Point C, eſt à la perpendiculaire FH, abbaiſſée du même Foyer ſur la Tangente en M; je dis que la viteſſe en M ſera à la viteſſe en C, comme la racine quarrée de la diſtance fM de la Planète à l'autre *Foyer f*,

[*a*] FC eſt *la diſtance moyenne* de la Planète au Foyer F; parce que FC eſt moyenne proportionelle Arithmétique entre la plus grande diſtance FB & la plus petite FA. Car FC = GA (33); or FB. GB ou GA; GA. FA; donc FB. FC: FC. FA.

est à la racine quarrée de sa distance FM au *Foyer* principal F.

DÉM. Soit u la viteſſe de la Planète au Point M, & V sa viteſſe en C; il faut démontrer que $u.V :: \sqrt{fM}.\sqrt{FM}$. Or l'on a (supp.) $u.V :: FT$ ou $CG.FH$; donc $u^2.V^2 :: \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{FH}$. Or $\overrightarrow{CG} = fh \times FH$ (62); ainsi $u^2.V^2 :: fh \times FH.\overrightarrow{FH} :: fh.FH$; mais les Triangles-Rectangles fhM, FHM, sont semblables; puisque l'Angle fMh = l'Angle FMH (35); donc $fh.FH :: fM.FM$; & par conséquent $u^2.V^2 :: fM.FM$; d'où l'on tire $u.V :: \sqrt{fM}.\sqrt{FM}$. C. Q. F. D.

65. COROL. XII. Le Rayon Vecteur FM est au Sinus de l'Angle FMH :: $\sqrt{FM \times fM}.CG$.

DÉM. Car, en prenant FM pour le Sinus total, ou pour le rayon de l'Arc qui mesure l'Angle FMH, il est évident que FH est le Sinus de l'Angle FMH: ainsi il faut démontrer que $FM.FH :: \sqrt{FM \times fM}.CG$. Or $FM \times FM.FM \times fM :: FM.fM :: FH.fh$ (parce que les Triangles-Rectangles FHM, fhM, sont semblables) :: $FH \times FH.fh \times FH$; donc $FM \times FM.FM \times fM :: FH \times FH.fh \times FH$; or $fh \times FH = \overrightarrow{CG}$ (62); ainsi $FM \times FM.FM \times fM :: FH \times FH.\overrightarrow{CG}$; par conséquent (en tirant les Racines quarrées & en alternant) $FM.FH :: \sqrt{FM \times fM}.CG$. C. Q. F. D.

66. PROB. AB, CD, étant données pour les deux Axes d'une *Ellipſe*, en trouver les *Foyers* & contruire cette Courbe. (fig. 53.)

RÉSOL. I. Faites que les Lignes AB, CD, se coupent par le milieu perpendiculairement en G; & supposant $AB > CD$, prenez AG ou GB; portez la de l'extrêmité C ou D du petit Axe en F, f, sur le grand Axe; & les Points F, f, ainsi déterminés seront les *Foyers* de la Courbe à décrire (33, 35 & 36).

II.

II. Maintenant, puiſque la ſomme des Lignes, menées des *Foyers* F, *f*, à un même Point de l'Ellipſe, doit toujours être égale à ſon grand Axe AB (33). Coupons AB en deux parties quelconques au Point L, pris du côté de G par rapport à F; après quoi du *Foyer* F avec la partie AL décrivons un Arc en *a*, *a*; & de l'autre *Foyer f*, avec l'autre partie LB, décrivons deux autres Arcs qui coupent les premiers en *a*, *a*; je dis que ces deux Points ſeront à l'Ellipſe que l'on cherche, de manière qu'en diviſant le grand Axe AB en deux autres parties quelconques aux Points H, K, &c. & opérant comme on vient de faire, on trouvera autant de Points que l'on voudra de la Courbe cherchée, comme la figure le démontre: en joignant donc tous ces Points par une ſeule Ligne, elle ſera l'Ellipſe que l'on demande.

DÉM. D'un Point quelconque *b*, déterminé comme dans la conſtruction, abbaiſſons la perpendiculaire $bS = y$ ſur $AB = 2a$; afin d'avoir $AG = GB = FC = a$, ſoit de plus $CG = GD = b$; $GS = x$; la différence de Fb à $bf = 2d$; ainſi, comme $Fb + bf = 2a$ (33), $Fb = a - d$, & $fb = a + d$ (*Inſt.* 103. *Alg. T.* 1.); $FG = Gf = c$; ainſi $FS = FG - GS = c - x$, & $fS = Gf + GS = c + x$; &, comme le Triangle FGC eſt Rectangle, $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{CG}$, ou $aa = cc + bb$; d'ou l'on tire $cc = aa - bb$. Ceci ſuppoſé.

Conſidérons le Triangle-Rectangle fSb, nous aurons $\overrightarrow{fb} = \overrightarrow{fS} + \overrightarrow{bS}$, ou $aa + 2ad + dd = cc + 2cx + xx + yy$ (M); & le Triangle-Rectangle FSb donnera $\overrightarrow{Fb} = \overrightarrow{FS} + \overrightarrow{bS}$, ou $aa - 2ad + dd = cc - 2cx + xx + yy$ (L); donc (en ſouſtrayant le premier membre de l'équation L, du premier membre de l'équation M, & le ſecond du ſecond) on aura $4ad = 4cx$; ainſi $d = \frac{cx}{a}$, & $dd =$

$\frac{c^2x^2}{aa}$; par conſéquent (en mettant dans l'une des deux équations M, $\frac{cx}{a}$ au lieu de d, & $\frac{ccxx}{aa}$ en la place de dd) cette équation M deviendra $aa + 2cx + \frac{ccxx}{aa} = cc + 2cx + xx + yy$; ou (en ôtant $2cx$ de part & d'autre) $aa + \frac{c^2x^2}{a^2} = c^2 + x^2 + y^2$; donc (en multipliant par aa) $a^4 + c^2x^2 = a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2$; ainſi (en mettant dans cette dernière équation, $aa - bb$ en la place de cc) on aura $a^4 + a^2x^2 - b^2x^2 = a^4 - a^2b^2 + a^2x^2 + a^2y^2$; donc (en ôtant de part & d'autre $a^4 + a^2x^2$, & tranſpoſant $-a^2b^2$) l'on trouvera $a^2b^2 - b^2x^2 = a^2y^2$, ou $aa - xx \times bb = aa \times yy$; d'où l'on tire $yy.\ aa - xx :: bb.\ aa$, ou $\overline{bS}.\ \overline{AS} \times SB :: \overline{CG}.\ \overline{AG}$; ce qui eſt la propriété caractériſtique de l'*Ellipſe* (12 & 14), quand AG > CG, ainſi qu'on le ſuppoſe ici. Le Point b, & tous les autres Points a, d, m, n, o, &c. trouvés d'une ſemblable manière, ſont donc à une ellipſe, dont les Lignes, AB, CD, ſont les Axes. C. Q. F. T. & D.

67. LEMME. Si l'on décrit un Cercle ARB (fig. 54.) ſur le grand Axe AB d'une *Ellipſe* ACB, & que l'on tire les Ordonnées Ib, Kd, &c. au Cercle, leſquelles rencontrent l'Ellipſe aux Points f, g; il arrivera que les Ordonnées fb, gd, &c. de l'Ellipſe, ſeront proportionelles aux Ordonnées correſpondantes Ib, Kd, &c. du Cercle; c'eſt-à-dire que $fb.\ Ib :: gd.\ Kd :: CG.\ RG$.

DÉM. I. Car $\overline{fb}.\ Ab \times bB :: \overline{CG}.\ \overline{RG}$ (12, 14 & 66): or, par la propriété du Cercle, $Ab \times bB = \overline{Ib}$; donc $\overline{fb}.\ \overline{Ib} :: \overline{CG}.\ \overline{RG}$, ou $fb.\ Ib :: CG.\ RG$.

II. Par la même raiſon, $\overline{gd}.\ Ad \times dB :: \overline{CG}.\ \overline{RG}$; mais

$Ad \times dB = \overline{Kd}$; donc $gd.\ Kd :: CG.\ RG$; ou $gd.\ Kd :: CG.\ RG$. Par conſéquent, puiſque (art. I.) $fb.\ Ib :: CG.\ RG$, on aura $fb.\ Ib :: gd.\ Kd$. C. Q. F. D.

68. PROBL. Trouver le rapport de l'*Aire* de l'Ellipſe, à celle du Cercle conſtruit ſur ſon grand Axe. (fig. 54.)

RÉSOL. I. Concevons que le demi grand Axe AG ſoit diviſé en un très-grand nombre de parties (on n'en ſuppoſe que quatre, pour éviter la confuſion); qu'aux Points de diviſion b, d, e, G, on ait élevé des Ordonnées au Cercle ainſi qu'à l'Ellipſe, & que de plus l'on ait circonſcrit des parallèlogrammes à ces deux figures; il eſt clair (n°. 68. de la Parabole) que le nombre des parallèlogrammes, circonſcrits au quart de Cercle, peut être tel qu'il différera de la ſurface du quart de Cercle, moins que d'une grandeur donnée, ſi petite qu'on la puiſſe ſuppoſer: on pourra donc prendre la ſomme de ces parallèlogrammes, pour la ſurface du quart de Cercle; & par la même raiſon, celle des parallèlogrammes circonſcrits au quart d'Ellipſe, pour la ſurface du quart d'Ellipſe.

II. Ceci ſuppoſé, il eſt évident que le Rectangle $Ab \times bf.\ Ab \times bI :: bf.\ bI$ (à cauſe de la Baſe commune Ab); or $bf.\ bI :: CG.\ RG$ (67); donc $Ab \times bf.\ Ab \times bI :: CG.\ RG$.

De même $bd \times dg.\ bd \times dK :: dg.\ dK :: CG.\ RG$; donc $bd \times dg.\ bd \times dK :: CG.\ RG$.

Pareillement $de \times eh.\ de \times em :: eh.\ em :: CG.\ RG$; donc $de \times eh.\ de \times em :: CG.\ RG$,

Enfin $eG \times CG.\ eG \times RG :: CG.\ RG$; & par conſéquent l'on a cette ſuite de rapports égaux $Ab \times bf.\ Ab \times bI :: bd \times dg.\ bd \times dK :: de \times eh.\ de \times em :: eG \times CG.\ eG \times RG$. Donc (258. *Inſt. T.* 2.) $Ab \times bf + bd \times dg + de \times eh + eG \times CG.\ Ab \times bI + bd \times dK + de \times em + eG \times RG :: Ab \times bf.\ Ab \times bI :: CG.\ RG$; c'eſt-à-dire (art. I.) la ſurface du quart d'Ellipſe, eſt à la ſurface du quart de Cercle comme $CG.\ RG$, ou $:: 2CG.\ 2RG = AB$; donc l'*Aire entière de l'Ellipſe, eſt à la ſurface totale du Cercle décrit ſur ſon grand Axe, comme le petit Axe eſt au grand Axe.* C. Q. F. T & D.

COROL. L'Aire de l'Ellipſe eſt donc égale au produit du petit Axe par l'Aire du Cercle, décrit ſur ſon grand Axe, diviſé par ce même grand Axe.

* 69. REMARQ. En conſtruiſant un Cercle ſur le petit Axe, on démontreroit de même que *la ſurface de l'Ellipſe eſt à l'Aire de ce Cercle, comme le grand Axe eſt au petit Axe.* D'où l'on voit que la *quadrature* du Cercle donneroit celle de l'Ellipſe.

* 70. COR. I. Il ſuit de là que le demi-Segment elliptique *AdgfA*, eſt au demi-Segment circulaire *AdKIA* correſpondant, comme l'Aire de l'Ellipſe à celle du Cercle conſtruit ſur ſon grand Axe.

Car on démontrera, comme ci-deſſus, que tous les Rectangles circonſcriptibles au demi-Segment elliptique, ſeront à ceux du demi-Segment circulaire correſpondant, comme le petit Axe eſt au grand Axe, ou comme l'Aire de l'Ellipſe eſt à celle du Cercle (68).

* 71. COR. II. Par conſéquent, ſi l'on ſçavoir trouver la poſition d'une Ligne droite FQ (fig. 55.) laquelle partant du *Foyer* F d'une Ellipſe, diviſât en raiſon donnée le Cercle conſtruit ſur ſon grand Axe; en abbaiſſant l'Ordonnée QP, & tirant FM au Point M où QP rencontre l'Ellipſe, il arriveroit que FM diviſeroit auſſi l'Aire de l'Ellipſe dans la même raiſon donnée.

Suppoſons donc que le Triangle circulaire BFQ ſoit à l'Aire du Cercle, comme 1 eſt à 5; je dis que le Triligne elliptique BFM eſt auſſi à l'Aire de l'Ellipſe, comme 1 eſt à 5.

DÉM. Soit l'Aire du Cercle = A; celle de l'Ellipſe = E; il faut prouver que ſi BFQ. A :: 1. 5, on aura BFM. E :: 1. 5. Pour cela rappellons nous 1°. Que le demi-Segment elliptique BMP eſt au demi-Segment circulaire BQP :: E. A (70). 2°. Que le Triangle FPM eſt au Triangle FPQ, (de même Baſe FP) :: MP. QP :: le petit Axe eſt au grand Axe (67) :: E. A (68); ainſi FPM. FPQ :: E. A.

Nous avons donc ces deux Propoſitions BMP. BQP :: E. A, & FPM. FPQ :: E. A, dont les rapports de l'une

ſont égaux aux rapports de l'autre ; par conſéquent en ajoutant par ordre les termes de ces proportions, nous aurons (255. *Inſt. T.* 2.) BMP + FPM. BQP + FPQ :: 2E. 2A :: E. A ; donc, en alternant, BMP + FPM. E :: BQP + FPQ. A. Or BMP + FPM = BFM, & BQP + FPQ = BFQ ; donc BFM. E :: BFQ. A ; mais BFQ. A :: 1. 5. (ſupp.) ; par conſéquent BFM. E :: 1. 5. C. Q. F. D.

* 72. REMARQ. La diviſion du Cercle en raiſon donnée, par une Ligne qui partiroit du Foyer de l'Ellipſe, fourniroit donc le moyen de diviſer auſſi l'Aire de l'Ellipſe en raiſon donnée, les Lignes de diviſion partant du *Foyer* ; & c'eſt là un des fameux Problêmes de *Kèpler*, ſi utile dans l'Aſtronomie Phyſique. Mais, comme il me paroît que ſa Réſolution géométrique dépénd de la quadrature du Cercle, ou de la rectification de ſa circonférence ; voici un moyen que j'ai trouvé d'en approcher tout d'un coup d'aſſez près, quand la diſtance FG du Foyer F au centre G (que j'appelle l'*Excentricité*) n'eſt pas conſidérable.

* 73. PROB. Diviſer l'Aire du Cercle en raiſon donnée, de manière que les diviſions partent d'un Point intérieur F, différent du centre G. (fig. 56.)

RÉSOLUTION *très-ſimple & fort approchée*, Après avoir mené, par les Points donnés F, G, un Diamètre AB, commencez par diviſer le Cercle dans la raiſon propoſée, en faiſant partir les diviſions du centre G ; c'eſt-à-dire que, ſi la raiſon eſt, par éxemple, de 1 à 6, vous ferez l'Arc BQ = la ſixième partie de la circonférence, & le Secteur BGQ ſera évidemment un ſixième du Cercle. Tirez enſuite FQ, & par le centre C lui menant la parallèle GM, ſi vous tracés FM, je dis que le Triligne BFM diviſera le Cercle dans la raiſon donnée, à très-peu près.

DÉM. Elle ſe réduit à faire voir que le Triligne BFM, eſt preſque égal au Secteur BGQ. Or ces deux figures ayant la partie commune BGLM, il reſte à démontrer que le Triangle FGL eſt preſque égal au Triligne LQM : mais

cela ſe conçoit tout d'abord ; puiſque les Triangles FGM, GQM, étant de même Baſe GM, & ſitués entre les mêmes parallèles GM, FQ, (conſt.) ſont égaux ; & que par conſéquent, en leur ôtant la partie commune GLM, on a le Triangle FGL = le Triangle LQM = preſque le Triligne LQM ; parce que la corde QM ſe confond preſque avec ſon Arc. Donc, &c. C. Q. F. D.

* 74. COR. III. Il ſuit encore du n°. 68, que la ſurface d'une Ellipſe eſt égale à celle d'un Cercle, dont le Diamètre eſt moyen proportionel géométrique entre le grand Axe & le petit Axe de cette Ellipſe.

DÉM. Soit l'Aire de l'Ellipſe = E ; ſon grand Axe = A ; l'Aire du Cercle conſtruit ſur cet Axe = C ; le petit Axe = D ; le Diamètre moyen proportionel = M ; l'Aire du Cercle de ce Diamètre = P ; il s'agit de démontrer que E = P. Or (ſupp.) A. M :: M. D ; donc $\overline{A.M}^2 :: \overline{M.D}^2$ (*Inſt.* 256. *T.* 2.) : mais $\overline{A.M}^2 :: C.P$ (*Inſt.* 306. *T.* 2.) ; donc C. P :: A. D ; or A. D :: C. E (68) ; donc C. P :: C. E ; ainſi, puiſque C = C, il faut que E = P.

* 75. COR. II. Les Aires des Ellipſes ſont entr'elles, comme les Produits de leurs Axes.

DÉM. Soyent E, *e*, les Aires de deux Ellipſes que l'on compare ; A, B, les Axes de E ; & *a*, *b*, ceux de *e*. Il faut démontrer que E. *e* :: A × B. *a* × *b*.

Pour cela, au lieu des Ellipſes, prenons les Cercles qui leur ſont égaux, c'eſt-à-dire, ceux dont les Diamètres ſont moyens proportionels géométriques, l'un entre A & B, & l'autre entre *a* & *b* (74). Soit donc E l'Aire du premier Cercle ; M ſon Diamètre, *e* l'Aire du ſecond Cercle ; *m* ſon Diamètre. Or l'on a (ſupp.) A. M :: M. B, & *a*. *m* :: *m*. *b* ; donc $M^2 = A \times B$ & $m^2 = a \times b$; ainſi $M^2 . m^2 :: A \times B . a \times b$: mais $M^2 . m^2 ::$ E. *e* (*Inſt.* 306. *T.*) donc E. *e* :: A × B. *a* × *b*. C. Q. F. D.

76. DÉF. Un *Ellipſoïde* eſt un corps engendré par la circonvolution d'une demi-Ellipſe ACB autour de l'un de ſes Axes AB. (fig. 54.)

* 77. PROB. Trouver la ſolidité d'un *Ellipſoïde.*

RÉSOL. Puiſqu'un Ellipſoïde eſt engendré par la circonvolution d'une demi-Ellipſe au tour de ſon Axe ; le demi-Ellipſoïde ſera engendré par la circonvolution du quart d'Ellipſe ACG au tour de la moitié AG de cet Axe ; de même qu'une demi-Sphère ſera engendrée, en faiſant tourner le quart de Cercle ARG autour de AG. Si nous pouvons donc déterminer le rapport du demi-Ellipſoïde à la demi-Sphère, qui a pour Diamètre le grand Axe AB de l'Ellipſe génératrice ACB ; comme on ſçait évaluer la ſolidité de la Sphère, nous aurons par là celle de l'Ellipſoïde.

Remarquons qu'en faiſant tourner le quart d'Ellipſe ACG, ainſi que le quart de Cercle ARG autour de la moitié AG du grand Axe, les parallèlogrammes circonſcrits, tant ceux du quart d'Ellipſe que ceux du quart de Cercle, engendreront des cylindres de même hauteur (parce qu'on ſuppoſe les diviſions *Ab*, *bd*, *de*, *e*G égales ; &, qu'ainſi la ſomme des cylindres circonſcrits à la demi-Sphère, pourra être priſe pour cette demi-Sphère ; & celle des circonſcrits au demi-Ellipſoïde, ne ſera pas différente de ce demi-Ellipſoïde ; comme on l'a démontré, lorſqu'il s'eſt agi de la ſolidité du Paraboloïde (n°. 72 de la Parab.).

Cela ſuppoſé, on aura le cylindre de AI [*a*] eſt au cylindre de A*f* de même hauteur, comme le Cercle de *b*I eſt au Cercle de *bf* :: $\overline{b\text{I}}^2$. $\overline{bf}^2$ (*Inſt.* 306. *T.* 2.) :: $\overline{\text{RG}}^2$. $\overline{\text{CG}}^2$ (67) ; donc le cylindre de AI eſt au cylindre de A*f* :: $\overline{\text{RG}}^2$. $\overline{\text{CG}}^2$ Pareillement le cylindre de *b*K eſt au cylindre de *bg*, comme le Cercle de *d*K eſt au Cercle de *dg* :: $\overline{d\text{K}}^2$. $\overline{dg}^2$ :: $\overline{\text{RG}}^2$. $\overline{\text{CG}}^2$; ainſi le cylindre de *b*K eſt au cylindre de *bg* :: $\overline{\text{RG}}^2$. $\overline{\text{CG}}^2$. On démontrera de la même manière que le cylindre de *dm* eſt au cylindre de *dh* :: $\overline{\text{RG}}^2$. $\overline{\text{CG}}^2$, & que le cylindre de *e*R

[*a*] Je nomme les Rectangles générateurs des cylindres, par deux lettres priſes diagonalement.

est au cylindre de $eC :: \overline{RG}^2 . \overline{CG}^2$; par conséquent (258. *Inst. T.* 2.) la somme des cylindres circonscrits à la demi-Sphère, c'est-à-dire, la demi-Sphère (que j'appelle S) est à la somme des cylindres circonscrits au demi-Ellipsoïde, c'est-à-dire, au demi-Ellipsoïde (que j'appelle E) :: $\overline{RG}^2 . \overline{CG}^2$, ou plus simplement $S . E :: \overline{RG}^2 . \overline{CG}^2 :: 2S . 2E$; donc $2E = \frac{2S \times \overline{CG}^2}{\overline{RG}^2}$ (L). Soit maintenant a le Cercle de RG, & b le Cercle de CG ; on aura $b . a :: \overline{CG}^2 . \overline{RG}^2$ (306. *Inst. T.* 2.) ; donc $\frac{b}{a} = \frac{\overline{CG}^2}{\overline{RG}^2}$; & par conséquent, en substituant $\frac{b}{a}$ au lieu de $\frac{\overline{CG}^2}{\overline{RG}^2}$ dans l'équation L, elle deviendra $2E = \frac{2S \times b}{a}$: mais 2S signifie la solidité de la Sphère entière, qui est égale aux deux tiers du cylindre qui lui feroit circonscrit (*Inst.* 393. *T.* 2.) ; c'est-à-dire que $2S = a \times \frac{2}{3} AB$; donc $2E = a \times \frac{2AB}{3} \times \frac{b}{a} = \frac{2}{3} AB \times b$; par où l'on voit que *la solidité de l'Ellipsoïde entier* 2E *se détermine, en multipliant le Cercle qui a pour rayon la moitié* CG *du petit Axe de l'Ellipsoïde proposé, par les deux tiers de son grand Axe* AB.

* 78. PROP. XII. Après avoir tiré le Diamètre MK (fig. 57.) par le Point M de contingence, si l'on mène un autre Diamètre SF parallèle à la Tangente MO ; & que l'on abbaisse les Ordonnées MP, IS, au grand Axe, on trouvera 1°. que le quarré $\overline{GI}^2 =$ le Rectangle AP × PB. 2°. que le quarré $\overline{GP}^2 =$ le Rectangle AI × IB.

DÉM. Soit toujours $AG = GB = a$; $CG = GD =$

b; PM $= y$; GP $= x$; ainſi AP $= a + x$; PB $= a - x$; & AP $\times$ PB $= aa - xx$; GI $= s$; donc AI $= a + s$; IB $= a - s$; & AI $\times$ IB $= aa - ss$. Il faut donc démontrer que $ss = aa - xx$, & que $xx = aa - ss$.

A cauſe de GS parallèle à MO (conſt.), il eſt clair que les Triangles-Rectangles MPO, GIS, ſont ſemblables; donc PO. GI :: PM. IS, ou $\overrightarrow{PO}$. $\overrightarrow{GI}$ :: $\overrightarrow{PM}$. $\overrightarrow{IS}$; mais (Propoſition XI. n°. 50 & 51) PO $= \frac{aa - xx}{x}$; ainſi $\overrightarrow{PO} = \frac{aa - xx \times aa - xx}{xx}$; par conſéquent la proportion précédente, exprimée analytiquement, devient $\frac{aa - xx \times aa - xx}{xx}$. $ss :: yy$. $\overrightarrow{IS}$ (R); mais (12) $\overrightarrow{GB}$. $\overrightarrow{CG}$ :: AI $\times$ IB. $\overrightarrow{IS}$, ou $aa.bb :: aa - ss$. $\overrightarrow{IS} = \frac{aabb - bbss}{aa}$, & $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$ (17); par conſéquent en ſubſtituant les valeurs de yy & de $\overleftarrow{IS}$ dans l'équation R, elle devient $\frac{aa - xx \times aa - xx}{xx}$. $ss :: \frac{aabb - bbxx}{aa}$. $\frac{aabb - bbss}{aa}$, & (en diviſant les deux derniers termes de cette prop. par $\frac{bb}{aa}$) on aura $\frac{aa - xx \times aa - xx}{xx}$. $ss :: aa - xx$. $aa - ss$; & (ſi l'on diviſe encore les antécédens par $aa - xx$) on trouvera $\frac{aa - xx}{xx}$. $ss ::$ 1. $aa - ss$; donc (en faiſant le produit des Extrêmes & celui des Moyens) $\frac{aa - xx \times aa - ss}{xx} = ss$, ou $ssxx = a^4 - a^2x^2 - a^2s^2 + s^2x^2$; donc (en ôtant $ssxx$ de part & d'autre, &

transposant $-a^2ss$) l'équation devient $a^2s^2 = a^4 - a^2x^2$; & par conséquent (en divisant par a^2) $s^2 = aa - xx$, ou $\overline{GI}^2 = AP \times PB$. C. Q. F. 1°. D.

2°. Puisque $ss = aa - xx$, l'on aura (en transposant) $xx = aa - ss$; c'est-à-dire $\overline{GP}^2 = AI \times IB$. C. Q. F. 2°. D.

79. I. DÉFIN. Quand deux Diamètres MK, SF sont tels, que l'un des deux SF est parallèle à la Tangente MO à l'extrémité M de l'autre Diamètre MK; ainsi qu'on l'a supposé dans la fig. on les appelle des *Diamètres conjugués;* parce qu'ils font des fonctions semblables, comme nous le verrons plus bas. Et toute Ligne NH ou VH, (fig. 58.) tirée d'un Point quelconque N ou V de l'Ellipse parallèlement à la Tangente MO ou au Diamètre SF, est dite *Ordonnée* au Diamètre conjugué MK.

79. II. COROL. I. Il suit de la Proposition XII. que le Triangle GPM = le Triangle GIS, ou que $GP \times PM = GI \times IS$. Car on vient de voir que $\overline{GI}^2 = AP \times PB$, & $\overline{GP}^2 = AI \times IB$; mais (10) $\overline{PM}^2 . \overline{IS}^2 :: AP \times PB . AI \times IB$; donc $\overline{PM}^2 . \overline{IS}^2 :: \overline{GI}^2 . \overline{GP}^2$, ou $PM . IS :: GI . GP$; ainsi $GP \times PM = GI \times IS$.

* 80. COROL. II. Par conséquent, si les deux Diamètres conjugués étoient égaux, ou si GM = GS, on auroit $GI = GP$ [a] & $\overline{GI}^2 = \overline{GP}^2$, ou $ss = xx$; par conséquent l'équation $ss = aa - xx$ (trouvée n°. 78) deviendroit $xx = aa - xx$; donc $2xx = aa$, ou $xx = \frac{aa}{2} = a \times \frac{a}{2}$; d'où l'on tire $a . x :: x . \frac{a}{2}$; c'est-à-dire que, quand les Diamètres conjugués sont égaux, l'Abcisse GP ou x, correspondante à l'Ordonnée abbaissée de l'extré-

[a] Parce que deux Triangles-Rectangles GPM, GIS, égaux en surface & par leur hypothénuse, ont nécessairement tous leurs côtés égaux, chacun à chacun.

mité de l'une de ces Diamètres ſur le grand Axe, eſt une moyenne proportionelle entre la moitié & le quart du grand Axe.

* 81. Réciproquement, ſi l'on prend ſur le grand Axe AB, la Ligne GP ou x moyenne proportionelle entre la moitié & le quart de ce grand Axe, c'eſt-à-dire, entre a & $\frac{a}{2}$; qu'au Point P l'on tire l'Ordonnée PM; enſuite le Diamètre MK, la Tangente MO, & le Diamètre SF parallèlement à MO; je dis que les Diamètres conjugués MK, SF, ſont égaux, ou que GM = GS.

DÉM. Car, abbaiſſant l'Ordonnée IS, $\overline{GI}^2 = AP \times PB$ (78) $= aa - xx$ (T); or $a. x :: x. \frac{a}{2}$ (ſupp.); donc $xx = \frac{aa}{2}$: ainſi, en mettant cette valeur de xx dans l'équation T, elle deviendra $\overline{GI}^2 = aa - \frac{aa}{2} = \frac{2aa - aa}{2} = \frac{aa}{2} = xx = \overline{GP}^2$; donc GI = GP [a]; mais GI × IS = GP × PM (79. II.); ainſi GI. GP :: PM. IS; donc puiſque GI = GP, l'on aura IS = PM, & par conſéquent GM = GS, ou MK = SF. C. Q. F. D.

* 82. COROL. III. Il eſt évident que dans une Ellipſe il n'y a qu'une paire de Diamètres conjugués égaux. Il eſt bien vrai qu'il y a ſur le grand Axe deux Points, l'un du côté de A & l'autre du côté de B, où l'on peut avoir une Abciſſe moyenne proportionelle entre la moitié & le quart de ce grand Axe: mais, comme les Ordonnées tirées à ces Points détermineroient les mêmes Diamètres, ainſi qu'il eſt aiſé de s'en convaincre (25); c'eſt une néceſſité qu'il n'y ait qu'une paire de Diamètres conjugués égaux dans une même Ellipſe.

---

[a] Remarquez que dans la fig. 57. l'Abciſſe GI devroit être la même que GP, quand on ſuppoſe les deux Diamètres conjugués égaux: on ne les laiſſe différentes, qu'afin de faire mieux ſentir la force de la Démonſtration.

* 83. REMARQ. Pour avoir aiſément ces Diamètres, ſans chercher une moyenne proportionelle, on remarquera que l'équation $xx = aa - xx$ (trouvée n°. 80.) eſt une équation au Cercle, dont les Abciſſes ont leur origine au centre ; & qui ſe conſtruit évidemment en faiſant l'Abciſſe égale à l'Ordonnée : ce qui eſt d'une éxécution très-facile, en abbaiſſant une double Ordonnée de la moitié du quart de Cercle, conſtruit ſur le grand Axe de l'Ellipſe ; & les deux Points, où cette double Ordonnée coupera l'Ellipſe, ſerviront à tirer les deux Diamètres conjugués égaux, puiſqu'alors l'Abciſſe du Cercle ſera égale à ſon Ordonnée.

Ce procédé eſt plus court que de chercher une moyenne proportionelle, mais il n'eſt pas eſſentiel.

* 82. COR. IV. Si l'on veut ſe ſervir du petit Axe CD, pour avoir les deux Diamètres conjugués égaux, on prendra GQ moyenne proportionelle entre la moitié & le quart de cet Axe, c'eſt-à-dire, entre b & $\frac{b}{2}$; on ménera l'Ordonnée QM ; par le Point M, où elle rencontrera l'Ellipſe, on tirera le Diamètre MK & la Tangente MO, à laquelle on ménera par le centre G, la parallèle SF, & les deux Lignes MK, SF, ſeront les deux Diamètres conjugués égaux.

DÉM. Du Point M abbaiſſant l'Ordonnée PM, on aura $PM = GQ$, & $\overline{PM}^2 = \overline{GQ}^2$; donc, puiſque $b.\ GQ :: GQ.\ \frac{b}{2}$ (conſt.), $\overline{GQ}^2 = \frac{bb}{2}$, & par conſéquent $\overline{PM}^2 = \frac{bb}{2}$. Mais $\overline{PM}^2.\ AP \times PB :: \overline{CG}^2.\ \overline{GB}^2$ (12) ; c'eſt-à-dire (en ſubſtituant les valeurs analytiques) $\frac{bb}{2}.\ aa - xx :: bb.\ aa$; donc $aa \times \frac{bb}{2} = \overline{aa - xx} \times bb$; donc (en diviſant par bb) $\frac{aa}{2} = aa - xx$; ainſi (en tranſpoſant) $xx = aa - \frac{aa}{2}$

$= \frac{2aa - aa}{2} = \frac{aa}{2}$; ou $xx = a \times \frac{a}{2}$; donc $a. x :: x. \frac{a}{2}$, c'eſt-à-dire que l'Abciſſe GP ou x eſt alors moyenne proportionelle entre la moitié & le quart du grand Axe; or, quand cela arrive, l'Ordonnée PM détermine les deux Diamètres conjugués égaux (81).

* 85. Cor. V. Prolongeant le petit Axe CD juſqu'à la rencontre H de la Tangente MO, on trouvera que GS, moitié du Diamètre conjugué SF au Diamètre MK, eſt moyenne proportionelle entre les Segmens MH, MO, de la Tangente HMO, faits par le Point de contingence M & déterminés par les prolongemens des deux Axes. Il faut donc prouver MH. GS :: GS. MO, ou que $\overline{GS}^2 = MO \times MH$.

Dém. On a déja obſervé que les Triangles-Rectangles MPO, GIS, étoient ſemblables (conſt.); donc GS. MO :: GI. PO (S); &, en tirant l'Ordonnée MQ au petit Axe, on verra encore que les Triangles-Rectangles HQM, GIS ſont ſemblables (à cauſe de HO parallèle à GS (conſt.)) donc GS. MH :: GI. MQ (T); ainſi, (en multipliant par ordre les termes des deux proportions, S, T,) on aura $\overline{GS}^2$. MO × MH :: $\overline{GI}^2$. PO × MQ (R); mais MQ = GP = x, & PO = $\frac{aa - xx}{x}$ (50 & 51); donc PO × MQ = $\frac{aa - xx}{x} \times x = aa - xx = \overline{a + x} \times \overline{a - x}$ = AP × PB = $\overline{GI}^2$ (78); donc PO × MQ = $\overline{GI}^2$. Donc (en reprenant la proportion R) MO × MH = $\overline{GS}^2$, ou MH. GS :: GS. MO. C. Q. F. D.

* 86. Cor. VI. En ſuppoſant donc GM < GS; & prolongeant GM, juſqu'à ce que le prolongement MT ſoit troiſième proportionel aux deux Lignes GM, GS, les quatre Points O, G, H, T, ſeront dans la circonférence d'un même Cercle, dont le centre eſt en quelque Point R de l'hypothénuſe HO.

Car GM. GS :: GS. MT (supp.), donc GM × MT = $\overline{GS}^2$, or $\overline{GS}^2$ = MO × MH (85); donc GM × MT = MO × MH; ainsi GM. MH :: MO. MT; les deux Lignes GT, HO se coupent donc, de manière que les parties de l'une sont réciproques aux parties de l'autre, & par conséquent leurs extrémités O, G, H, T, sont dans la circonférence d'un même Cercle (par la conv. du n°. 287. *Inst. T.* 2.), dont le centre doit se trouver sur l'hypothénuse HO; puisque l'Angle droit OGH étant à la circonférence du Cercle, il faut nécessairement que HO soit un Diamètre.

Pour trouver le centre de ce Cercle, sur le milieu de la corde GT on élévera une perpendiculaire LR, qui rencontrera l'hypothénuse HO en quelque Point R; parce que l'Angle GMO étant obtus (39), il faut que l'Angle LMR soit aigu; & qu'ainsi MR & LR se rencontrent en quelque Point R, qui sera évidemment le centre du Cercle, qui passe par les quatre Points, O, G, H, T.

* 87. COR. VII. On voit par là ce qu'il faut faire, pour trouver les deux Axes d'une Ellipse, dont SF, MK, sont deux Diamètres conjugués inégaux, donnés *de grandeur & de position* [a]; c'est de faire le prolongement MT troisiéme proportionel aux Lignes GM, GS; de tirer au Point M l'indéfinie HMO parallèlement à SF; d'élever la perpendiculaire LR sur le milieu de GT; & du Point R, où elle rencontre l'indéfinie HO, décrire par le Point d'intersection G le Cercle GHTO, qui coupera l'indéfinie HMO aux Points H, O: car, si de ces Points l'on tire au centre G, les Lignes OG, HG, indéfiniment prolongées, les deux Axes se trouveront sur ces Lignes; puisqu'elles se coupent au centre à Angles droits (const.); & que GM étant à GS :: GS. MT (const.) on a $\overline{GS}^2$ = GM × MT =

[a] On dit que des Lignes sont *données de grandeur*, quand leur longueur est déterminée; & qu'elles sont *données de position*, quand l'Angle qu'elles font est donné.

$HM \times MO$ (par la nat. du Cerc.) donc $\overline{GS}^2 = HM \times MO$; ce qui démontre que les Points H, O, ſont ſur les Axes prolongés (85.)

Pour déterminer la longueur de ces Axes, on obſervera que la Ligne HMO étant Tangente (79. I.), ſi l'on abbaiſſe perpendiculairement MP ſur OG, & MQ ſur HG; & qu'on prenne GB moyenne proportionelle entre GP & GO, ainſi que GC moyenne proportionelle entre GQ & GH, les Lignes GB, GG, ſeront les demi Axes (54 & 58) &c.

* 88. PROP. XIII. Le Rectangle $MH \times HK$ (fig. 58.) des Segmens d'un Diamètre quelconque MK, faits par une Ordonnée quelconque NH à ce Diamètre, eſt au quarré $\overline{NH}^2$ de cette Ordonnée, comme le quarré du Diamètre MK eſt au quarré de ſon conjugué FS, ou comme le quarré de GM eſt au quarré de GS.

DÉM. Par le Point H, où l'Ordonnée NH coupe le Diamètre MK, tirons QHR parallèlement, & HL perpendiculairement à l'Axe AB; & des Points M, N, abbaiſſons ſur ce même Axe les Ordonnées MP, NT que nous prolongerons juſqu'à la rencontre R de QR. Après cela ſoit $AG = GB = a$; $CG = GD = b$; $GP = x$; $PM = y$; $GL = m$; $HR = LT = s$; ainſi $GT = GL + LT = m + s$; $GM = GK = g$; $GH = z$; $MH = GM - GH = g - z$; $HK = GK + GH = g + z$; ainſi $MH \times HK = g - z \times g + z = gg - zz$; $NH = t$, ou $\overline{NH}^2 = tt$; $GS = d$, ou $\overline{GS}^2 = dd$; $AT = AG + GL + LT = a + m + s$, & $TB = GB - GL - LT = a - m - s$; donc $AT \times TB = a + m + s \times a - m - s = aa - mm - 2ms - ss$; $AP = AG + GP = a + x$; $PB = GB - GP = a - x$; donc $AP \times PB = a + x \times a - x = aa - xx$; &, ſuppoſant la Tangente MO au Point M, $PO = \frac{aa - xx}{x}$ (50 & 51). Il faut donc démontrer que MH

$\times$ HK $(gg - zz)$. $\overline{NH}^2$ (tt) :: $\overline{GM}^2$ (gg). $\overline{GS}^2$ (dd).

Les Triangles GPM, GLH, étant ſemblables, GP (x). PM (y) :: GL (m). LH $= \frac{my}{x} =$ TR; &, comme NH eſt parallèle à MO (conſt.), les Triangles MPO, HNR, ſont auſſi ſemblables; donc PO $\left(\frac{aa - xx}{x}\right)$. PM (y) :: HR (s). RN $= \frac{sxy}{aa - xx}$; donc NT $=$ TR $-$ RN $=$ $\frac{my}{x} - \frac{sxy}{aa - xx}$; par conſéquent $\overline{NT}^2 = \overline{\frac{my}{x} - \frac{sxy}{aa - xx}}^2$ $= \frac{m^2y^2}{xx} - \frac{2msy^2}{aa - xx} + \frac{s^2x^2y^2}{\overline{aa - xx}^2}$. Mais nous pouvons trouver une autre valeur de $\overline{NT}^2$; car il a été démontré (10) que AP $\times$ PB $(aa - xx)$. AT $\times$ TB $(aa - mm - 2ms - ss)$ :: $\overline{PM}^2$ (yy). $\overline{NT}^2 = \frac{aayy - mmyy - 2msy^2 - s^2y^2}{aa - xx}$; donc, en comparant les deux valeurs de $\overline{NT}^2$, on trouve l'équation $\frac{m^2y^2}{xx} - \frac{2msy^2}{aa - xx} + \frac{s^2x^2y^2}{\overline{aa - xx}^2} = \frac{a^2yy - m^2yy - 2msyy - s^2yy}{aa - xx}$; laquelle devient (en effaçant de part & d'autre $\frac{-2msy^2}{aa - xx}$, & (diviſant par yy) $\frac{m^2}{xx} + \frac{s^2x^2}{\overline{aa - xx}^2} = \frac{aa - mm - ss}{aa - xx}$; & (en multipliant par xx) l'on a $mm + \frac{s^2x^4}{\overline{aa - xx}^2} = \frac{a^2x^2 - m^2x^2 - s^2x^2}{aa - xx}$; donc (en tranſpoſant mm, & le réduiſant à la même dénomin.) on

on trouve $\frac{s^2x^4}{aa-xx} = \frac{a^2x^2 - m^2x^2 - s^2x^2 + a^2m^2 + m^2x^2}{aa-xx}$

ainſi (en ôtant ce qui ſe détruit, & multipliant par $aa-xx$) $\frac{s^2x^4}{aa-xx} = a^2x^2 - s^2x^2 - a^2m^2$; donc (en tranſpoſant le terme $-s^2x^2$, & le réduiſant à la même dénomin.) $\frac{s^2x^4 + a^2s^2x^2 - s^2x^4}{aa-xx} = a^2x^2 - a^2m^2$, ou (en ôtant ce qui ſe détruit) $\frac{a^2s^2x^2}{aa-xx} = a^2x^2 - a^2m^2$; & (en diviſ. par aa) $\frac{s^2x^2}{aa-xx} = x^2 - m^2$; multipliant enſuite par $aa-xx$; l'équation devient $s^2x^2 = x^2 - m^2 \times aa - xx$ & (en diviſant par xx) s^2 ou $HR = \frac{x^2 - m^2 \times aa - xx}{xx}$.

Revenons préſentement aux Triangles ſemblables GPM, GLH, nous aurons GP (x). GM (g) :: GL (m). GH $= \frac{gm}{x}$. Ainſi $GM - GH = gg + \frac{ggmm}{xx}$. Or $GM - GH = GM - GH \times GM + GH = MH \times HK$; donc $MH \times HK = gg - \frac{ggmm}{xx} = \frac{ggxx - ggmm}{xx}$. Or, il eſt aiſé de ſe convaincre que $MH \times HK \left(\frac{ggxx - ggmm}{xx}\right)$. $HR \left(\frac{xx - mm \times aa - xx}{xx}\right)$ :: GM (gg). GI ($aa - xx$ (78. Propoſ. XII.)); puiſque le produit des Extrêmes eſt égal à celui des Moyens; donc (en alternant) $MH \times HK$. GM :: HR. GI. Or (à cauſe des Triangles ſemblables

RHN, IGS) $\overline{HR}^2 . \overline{GI}^2 :: \overline{NH}^2 . \overline{GS}^2$; donc $\overline{MH} \times \overline{HK} . \overline{GM}^2 :: \overline{NH}^2 . \overline{GS}^2$; & par conſéquent, en alternant, $\overline{MH} \times \overline{HK} . \overline{NH}^2 :: \overline{GM}^2 . \overline{GS}^2$, ou $gg - zz . tt :: gg . dd$. C. Q. F. D.

* 89. COR. I. L'Ordonnée NH ayant été priſe à liberté, il s'enſuit que toute autre Ordonnée eſt dans le même cas, & qu'ainſi $\overline{MH} \times \overline{HK} . \overline{VH}^2 :: \overline{GM}^2 . \overline{GS}^2$; donc $\overline{VH}^2 = \overline{NH}^2$, ou $VH = NH$; c'eſt-à-dire, qu'une corde quelconque NV, Ordonnée au Diamètre MK, ou parallèle à la Tangente au Sommet de ce Diamètre, eſt coupée en deux parties égales par ce Diamètre.

* 90. REMARQ. Si l'on avoit voulu démontrer cette vérité directement, par rapport à l'Ordonnée VH, au lieu de l'Ordonnée NT à l'Axe, & du Rectangle correſpondant $AT \times TB$, on ſe ſeroit ſervi de l'Ordonnée VE, & du Rectangle correſpondant $AE \times EB$, ainſi que du Triangle HVQ, dont les côtés comparés avec ceux du Triangle MPO auroient conduit à faire voir que $\overline{MH} \times \overline{HK} . \overline{VH}^2 :: \overline{GM}^2 . \overline{GS}^2$.

* 91. COR. II. Puiſque $gg - zz . tt :: gg . dd$, (88) on aura $gg - zz = \frac{ggtt}{dd}$; & par conſéquent $z = GH$ diminuant, $t = NH$ augmentera, ou au contraire z augmentant, t diminuera, c'eſt-à-dire, que les Abciſſes d'un Diamètre quelconque de l'Ellipſe diminuant, les Ordonnées à ce Diamètre augmenteront, & qu'au contraire ces mêmes Abciſſes augmentant, les Ordonnées diminueront; ainſi qu'on l'a fait voir pour les Axes (18 & 21). on ſuppoſe, dans tout ceci, que le centre de la Courbe ſoit l'origine des Abciſſes, & que les Ordonnées ſoyent priſes d'un même côté de ce centre.

* 92. COR. III. Si une corde quelconque Ax eſt coupée en deux parties égales par un Diamètre MK, au point b, cette corde ſera Ordonnée à ce Diamètre; c'eſt-à-

dire, qu'elle ſera néceſſairement parallèle à la Tangente MO, tirée par l'une ou l'autre extrémité M de ce Diamètre.

DÉM. Si cela n'étoit pas, on pourroit donc tirer par le Point A, parallèlement à la Tangente MO, une Ligne *Ay*, laquelle tombant au-deſſous ou au-deſſus de la corde *Ax*, ſeroit ordonnée au Diamètre MK (79. I.); & par conſéquent coupée par ce Diamètre en deux parties égales au Point *r* (89); donc $Ar = ry$; mais $Ab = bx$ (ſupp.); ainſi $Ar. Ab :: ry. bx$; donc (en tirant la corde *xy*) *rb* ou MK ſeroit parallèle à *xy* (par la conv. du n°. 279. *Inſt. T.* 2.); ainſi, en menant des Point *x*, *y*, les Ordonnées *yt*, *xb*, au Diamètre MK, elles ſeroient égales; parce que les parallèles entre parallèles ſont égales); c'eſt-à-dire, qu'à des diſtances différentes du centre, on auroit du même côté des Ordonnées égales; ou, ce qui revient au même que les Abciſſes diminuant, les Ordonnées n'augmenteroient pas. Ce qui eſt abſurde (91).

* 93. COR. IV. Il ſuit de là qu'une Ligne HL (fig. 59.), qui joint les Points de milieu H, L, de deux cordes VB, *rn* de l'Ellipſe, parallèles entr'elles, étant prolongée, s'il en eſt beſoin, paſſe néceſſairement par le centre G de la Courbe; c'eſt-à-dire, que cette Ligne eſt un des Diamètres de l'Ellipſe.

DÉM. Du centre G tirons par le milieu H de la corde *rn*, le Diamètre MK; il eſt évident que *rn* ſera une corde Ordonnée à ce Diamètre (92), & qu'ainſi VB parallèle à *rn* (ſupp.) ſera auſſi une corde Ordonnée au même Diamètre, qui la coupera par conſéquent en deux parties égales (89); ainſi le Diamètre, qui paſſera par le milieu de *rn*, paſſera auſſi par celui de VB; donc la Ligne HL, qui joint les Points de milieu de ces deux cordes, ayant deux Points communs avec ce Diamètre, n'en ſera pas différente. Il faut donc conclure que toute Ligne, qui coupe en deux parties égales deux cordes parallèles d'une Ellipſe, eſt néceſſairement un des Diamètres de cette Courbe.

* 94. COR. V. Par un même Point H d'un Diamètre

MK d'une Ellipſe, il n'eſt pas poſſible de faire paſſer deux cordes, qui ſoyent coupées en deux parties égales par ce Diamètre. Car, ſi cela étoit, ces deux cordes ſeroient Ordonnées au Diamètre MK (92), ou parallèles à la Tangente MO; & l'on auroit du même Point deux parallèles à une même Ligne. Ce qui eſt abſurde.

* 95. COR. VI. Si une corde *rn* de l'Ellipſe, eſt coupée en deux parties égales par un Diamètre MK; & que par l'une des extrémités M de ce Diamètre, l'on tire une parallèle MO à cette corde; je dis que cette parallèle ſera Tangente au Point M.

DÉM. Si MO n'étoit pas Tangente dans une pareille circonſtance, on pourroit donc au Point M mener une Tangente M*x*, laquelle tombant au-deſſus ou au-deſſous de MO, ſeroit parallèle à la corde *rn*; puiſque *rn* étant coupée en deux parties (ſupp.) par le Diamètre MK, ſeroit Ordonnée à ce Diamètre; ou parallèle à la Tangente au Point M (92); donc réciproquement la Tangente M*x* ſeroit parallèle à la corde *rn*; mais MO eſt auſſi parallèle à cette même corde (ſupp.); l'on auroit donc au même Point M, deux Lignes MO, M*x*, parallèles à une même Ligne *rn*. Ce qui eſt abſurde. Il eſt donc néceſſaire qu'une Ligne MO, tirée par l'extrémité d'un Diamètre parallèlement à une corde, coupée en deux parties égales par ce Diamètre, c'eſt-à-dire, parallèlement à une Ordonnée à ce Diamètre, ſoit Tangente au Point M.

96. REMARQ. On pouvoit établir cette vérité, de la même manière que l'on a démontré les n°. 19 & 22, en la déduiſant immédiatement du n°. 91.

97. COR. VII. En ſuppoſant donc que l'on puiſſe avoir une Ordonnée à un Diamètre, ſans le ſecours de la Tangente à l'une ou l'autre de ſes extrémités; il eſt viſible que l'on aura un moyen de tirer une Tangente à un Point quelconque M d'une Ellipſe donnée.

Car du Point M tirant le Diamètre MK par le centre G (que je ſuppoſe donné ou trouvé), on lui cherchera une Ordonnée quelconque *rn* (ainſi que nous l'enſeignerons

n°. 105) : après quoi par l'extrémité M, on tirera parallèlement à cette Ordonnée, la Ligne MO qui ſera la Tangente cherchée (95). Or, dans la Réſolution des Problêmes, que nous donnerons bientôt, nous propoſerons un moyen d'avoir une Ordonnée quelconque à un Diamètre, ſans le ſecours des Tangentes.

* 98. PROP. XIV. Après avoir tiré rT parallèlement au Diamètre MK, on trouvera que le Rectangle FT × TS des Segmens FT, TS, du Diamètre FS, eſt au quarré de l'Ordonnée rT à ce Diamètre, comme le quarré de ce Diamètre FS eſt au quarré de ſon conjugué MK, ou comme le quarré de GF eſt au quarré de GM; il faut donc prouver que $FT \times TS. \overline{rT}^2 :: \overline{GF}^2. \overline{GM}^2$.

DÉM. Il eſt clair que $GH = rT$, ou $\overline{GH}^2 = \overline{rT}^2$, & que $rH = TG$, ou que $\overline{rH}^2 = \overline{TG}^2$. Rappellons-nous donc la Propoſition XII. (88), où il a été démontré que $MH \times HK. \overline{rH}^2 :: \overline{GM}^2. \overline{GS}^2$ ou $\overline{FG}^2$; & remarquons que $MH \times HK = \overline{MG - GH} \times \overline{MG + GH} = \overline{MG}^2 - \overline{GH}^2$ (à cauſe de $GK = GM$) $= \overline{MG}^2 - \overline{rT}^2$ (parce que $GH = rT$); donc $MH \times HK = \overline{MG}^2 - \overline{rT}^2$. Ainſi la proportion précédente deviendra $\overline{MG}^2 - \overline{rT}^2. \overline{TG}^2 :: \overline{GM}^2. \overline{FG}^2$, ou (en alternant) $\overline{GM}^2. \overline{GM}^2 - \overline{rT}^2 :: \overline{FG}^2. \overline{TG}^2$; donc (en ſouſtrayant) $\overline{rT}^2. \overline{GM}^2 :: \overline{FG}^2 - \overline{TG}^2. \overline{FG}^2$ (M); mais $\overline{FG}^2 - \overline{TG}^2 = \overline{FG - TG} \times \overline{FG + TG} = FT \times TS$; donc, en mettant dans l'équation M, $FT \times TS$ au lieu de $\overline{FG}^2 - \overline{TG}^2$, on aura $\overline{rT}^2. \overline{GM}^2 :: FT \times TS. \overline{FG}^2$, ou (en altern.) $FT \times TS. \overline{rT}^2 :: \overline{FG}^2. \overline{GM}^2$. C. Q. F. D.

* 99. REMARQ. On trouve donc les mêmes propriétés de l'Ellipſe, ſoit qu'on prenne les Ordonnées au Diamètre MK, ſoit qu'on prenne les Ordonnées au Diamètre

FS : c'eſt pourquoi les deux Diamètres MK, FS, ſont appellés *conjugués*, parce qu'ils ſont des fonctions ſemblables.

On voit en même tems que la propriété principale de l'Ellipſe, rélativement à ſes Axes (10, 12, 20) s'étend, par le moyen des Propoſitions 13 & 14, à un Diamètre quelconque. Ainſi tout ce que l'on a déduit en vertu de cette propriété par rapport aux Axes, doit avoir lieu rélativement à un Diamètre quelconque.

* 100. COR. I. On en concluera donc 1°. comme au n°. 10, que les quarrés des Ordonnées à un Diamètre quelconque d'une Ellipſe, ſont entr'eux comme les Rectangles des Segmens correſpondans.

2°. Comme au n°. 52 que, ſi l'on tire à un Point Z de l'Ellipſe, différent des extrémités des Axes, une Tangente PZ, laquelle rencontre en P le prolongement d'un Diamètre quelconque FS, l'on aura, en tirant l'Ordonnée Z*y* à ce Diamètre, G*y*. *y*S :: F*y*. *y*P ; ou, comme au n°. 54, G*y*. GS :: GS. GP.

Et réciproquement, ſi après avoir tiré d'un Point P au-dehors de l'Ellipſe la Ligne PG au centre, on cherche une troiſiéme proportionelle aux Lignes GP, GS, & qu'on la porte de G en *y* ſur le demi-Diamètre GS, pour tirer à ce Diamètre l'Ordonnée *y*Z au Point *y*, alors la Ligne PZ ſera Tangente. Ce que l'on démontrera comme au n°. 53.

* 101. COR. II. En reprenant l'équation $gg - zz = \frac{ggtt}{dd}$ du n°. 91, ſi l'on ſuppoſe que les deux Diamètres SF, MK (fig. 58.), ſoient égaux, ou que $g = d$; alors l'équation $gg - zz = \frac{ggtt}{dd}$ deviendra $gg - zz = tt$; ce qui ſignifie que MH × HK = $\overline{\text{NH}}^2$; équation qui ne différe de celle du Cercle, qu'en ce que dans l'Ellipſe les Ordonnées ne ſont pas perpendiculaires à leur Diamètre ; au lieu qu'elles le ſont toujours dans le Cercle. L'on ne ſçauroit donc décider par la ſeule inſpection d'une équation $gg - zz = tt$, ſi cette équation appartient à l'Ellipſe ou au

Cercle. Il faut abſolument avoir recours à la nature des *co-Ordonnées* [*a*]. Quand il eſt droit, cette équation eſt au Cercle; mais, s'il eſt oblique, elle appartient à une Ellipſe, dont elle repréſente les deux Diamètres conjugués égaux.

* 102. COR. III. Si l'on cherche une troiſiéme proportionelle p à deux Diamètres conjugués quelconques MK, FS; cette Ligne p eſt le *Paramètre* du Diamètre MK; mais elle ſeroit le Paramètre du Diamètre FS, ſi ce Diamètre étoit le premier terme de la proportion, & MK le ſecond. Soit donc $2g.\ 2d :: 2d.\ p$, & l'on aura $4gg.\ 4dd :: 2g.\ p$ (256. *Inſt. T.* 2.); donc $\frac{gg}{dd} = \frac{2g}{p}$. Par conſéquent, en ſubſtituant dans l'équation aux Diamètres $gg - zz = \frac{ggtt}{dd}$, trouvée n°. 91. l'expreſſion $\frac{2g}{p}$ au lieu de $\frac{gg}{dd}$, on aura $gg - zz = \frac{2gtt}{p}$, qui eſt une équation à l'Ellipſe, par rapport au Paramètre de l'un de ſes Diamètres MK.

* 103. COROL. IV. D'où il ſuit, comme aux n°. 28 & 29, que le Rectangle MH × HK de deux Segmens quelconques d'un Diamètre MK, eſt au quarré $\overline{NH}^2$ de l'Ordonnée correſpondante, comme ce Diamètre eſt à ſon Paramètre. Car, puiſque $gg - zz = \frac{2gtt}{p}$ (102); donc (en multipl. par p) $gg - zz \times p = 2g \times tt$; ainſi $gg - zz.\ tt :: 2g.\ p$, ou $\overline{MH \times HK}^2.\ \overline{NH}^2 :: MK.\ p$.

* 104. PROB. Une Ellipſe étant donnée, en trouver 1°. Un Diamètre quelconque. 2°. Le Centre. 3°. Les Axes; 4°. Les Foyers; 5°. Les Diamètres conjugués égaux. (fig. 60.).

[*a*] Quand l'Abciſſe & ſon Ordonnée correſpondante ſont priſes enſemble, elles s'appellent *co-Ordonnées*; ce qui ſignifie proprement *Ordonnées enſemble*. Effectivement l'Abciſſe GH d'un Diamètre MK (fig. 59), peut-être priſe pour l'Ordonnée *r*T à ſon Diamètre conjugué FS, & réciproquement.

RÉSOL. 1°. Tirez, dans cette Ellipſe, deux cordes quelconques *nB*, *ml*, parallèles entr'elles; par leurs Points de milieu I, S, faites paſſer la Ligne OP, laquelle ſera un Diamètre de la Courbe (93).

2°. Coupez le Diamètre OP en deux parties au Point G, & G en ſera le centre (25).

3°. De ce centre G décrivez un Arc de Cercle, qui coupe l'Ellipſe en deux Points P, T, menez la corde PT; diviſez là en deux parties égales au Point *x*; par ce Point & par le centre G menez la Ligne AB; ce ſera un des Axes.

Car la corde PT étant coupée en deux parties égales par AB, qui paſſe par le centre de ſon Arc, cette corde ſera Ordonnée au Diamètre AB (92); &, comme elle eſt perpendiculaire à ce même Diamètre (conſtruction), il s'enſuit que AB eſt un des Axes: parce qu'il n'y a que les Axes, dont les Ordonnées ſoyent perpendiculaires; puiſque toute Ordonnée à un Diamètre eſt parallèle à la Tangente, menée par une des extrémités de ce Diamètre (79. I.); & qu'il n'y a que les Tangentes aux extrémités des Axes, qui ſoyent perpendiculaires à ces Diamètres. Toute Ligne, menée du centre de l'Ellipſe en tout autre Point de ſon Périmètre, faiſant toujours un Angle oblique avec la Tangente en ce Point (39).

4°. Elevez préſentement ſur le milieu de AB, la perpendiculaire CGD, & cette perpendiculaire ſera l'autre Axe de l'Ellipſe (9). Si AB > CD, la Ligne AB ſera le grand Axe, & CD le petit, ou l'Axe conjugué à l'Axe AB; & au contraire, CD ſera le grand Axe & AB le petit, ſi CD > AB.

5°. Après avoir déterminé les deux Axes, on trouvera les Foyers F, *f*, de cette Courbe, comme au n°. 66;

6°. Pour en avoir les Diamètres conjugués égaux; de l'une des extrémités A du grand Axe, on tirera aux extrémités C, D, du petit, les cordes AC, AD; & par les Points de milieu *t*, *r*, de ces cordes l'on mènera du centre G les deux Lignes GP, GT, leſquelles prolongées en O, K, donneront les deux Diamètres conjugués égaux OP, KT.

Car AC étant évidemment égale à AD, & GP tirée sur AD de la même manière que GT l'est sur AC, on en conclura aisément que GP = GT. De plus la corde AC étant coupée en deux parties égales par le Diamètre KT (const.), il s'ensuit que AC est une double Ordonnée à ce Diamètre (92). Ainsi, pour démontrer que le Diamètre OP est conjugué au Diamètre KT, il suffit de faire voir que OP est parallèle à AC (79. I.). Or, puisque GD = CG, & D*t* = *t*A (const.), GD. CG :: D*t*. *t*A; donc AC est parallèle à G*t* ou OP (conv. du n°. 279. *Inst. T.* 2.) C. Q. F. D.

* 105. PROBL. Ayant un Diamètre quelconque OP d'une Ellipse donnée, trouver la position des Ordonnées à ce Diamètre; tirer une Tangente à l'une ou l'autre de ses extrémités; & trouver son Diamètre *conjugué*.

RÉSOL. Prenez sur le Périmètre de l'Ellipse, un Point quelconque *n*, différent des Points O, P; de ce Point *n* menez à l'une des extrémités O du Diamètre OP la corde *n*O; prolongez la jusqu'à ce que O*b* = *n*O, & du Point *b* menez *b*B parallèlement à OP; alors, si du Point *n* au Point B, où *b*B rencontre l'Ellipse, vous tirez la corde *n*B, elle sera Ordonnée au Diamètre OP, & en tirant par l'une ou l'autre extrémité P de ce Diamètre, une parallèle PQ à *n*B, elle sera Tangente au Point P; enfin par le centre G, menez une parallèle KT à l'Ordonnée *n*B, ou à la Tangente PQ, & KT sera le Diamètre conjugué à OP.

DÉM. Puisque *b*B est parallèle à OP (const.), vous aurez *n*O, O*b* :: *n*S. SB. Or *n*O = O*b* (const.), donc *n*S = SB; la corde *n*B est donc coupée en deux parties égales par le Diamètre OP, & par conséquent elle est Ordonnée à ce Diamètre; c'est-à-dire, parallèle à la Tangente que l'on tireroit par l'une ou l'autre extrémité de ce Diamètre (92).

2°. La Ligne PQ étant parallèle à la corde *n*B Ordonnée au Diamètre OP, c'est-à-dire, coupée en deux parties égales par ce Diamètre (const.) est nécessairement Tangente au Point P (95).

3°. Pareillement le Diamètre KT, étant parallèle à la

Tangente PQ, menée par l'extrémité P du Diamètre OP, eſt néceſſairement conjugué au Diamètre OP (79. I.) C. Q. F. D.

* 106. PROB. D'un Point donné P au-dehors d'une Ellipſe, mener une Tangente à cette Courbe. (fig. 59.)

RÉSOL. Trouvez le centre G de l'Ellipſe (104); & après avoir tiré PG, cherchez une troiſiéme proportionelle aux deux Lignes GP, GS; portez la de G en y, où vous tirerez l'Ordonnée yZ (105); après cela menant du Point P au Point Z la Ligne PZ, vous aurez la Tangente cherchée; ce qui eſt évident (n°. 100), puiſque Gy. GS :: GS. GP. (conſt.).

* 107. REMARQ. En prolongeant yZ de l'autre côté du Diamètre FS, juſqu'à ce quelle rencontre l'Ellipſe en un autre Point (je ſupprime ce prolongement, ainſi que la Tangente tirée à ſon extrémité pour éviter la confuſion des Lignes), ſi l'on tiroit une Ligne du Point P à l'extrémité de ce prolongement, elle ſeroit Tangente à l'Ellipſe par la même raiſon que ci-deſſus (106).

* 108. COROL. Ainſi d'un même Point P donné au-dehors d'une Ellipſe, l'on peut toujours mener à cette Courbe deux Tangentes; leſquelles ſeront égales, quand le Point donné ſera ſur le prolongement des Axes; mais elles ſeront inégales en tout autre Point, à cauſe des Angles droits que font les Ordonnées dans le premier cas, & des Angles obliques qu'elles font dans le ſecond.

* 109. PROB. Trouver le rapport du Rectangle LPxT (fig. 61.) des deux Axes d'une Ellipſe, au parallélogramme KgON de deux de ſes Diamétres conjugués quelconques ef, zI; c'eſt-à-dire, qu'ayant tiré par les extrémités A, B, C, D, des Axes, les Tangentes LP, Px, xT, TL; pour avoir le Rectangle LPxT circonſcrit à l'Ellipſe; & fait la même conſtruction aux extrémités f, e, z, I, de deux Diamètres conjugués quelconques ef, zI, pour avoir le parallélogramme oblique KgON, circonſcrit à la même Ellipſe, on demande dans quel rapport ſont ces deux parallélogrammes? Ou, ce qui revient au même, quel eſt le rapport du quart BGDx du premier au quart fGIO du ſecond.

RÉSOL. Joignons l'extrêmité I d'un des Diamètres conjugués à l'extrêmité B du grand Axe la plus proche ; tirons par I la Ligne bQ parallèlement au grand Axe, & par B la Ligne Mr parallèle au Diamètre zI. Cela ſuppoſe.

Il eſt clair 1°. que le Triangle GIB eſt la moitié du Rectangle $BGbQ$; ces deux figures ayant même baſe GB, & étant entre les mêmes parallèles GB, bQ. Par la même raiſon le Triangle GIB eſt la moitié du Parallèlogramme $GMrI$; ainſi $BGbQ = GMrI$.

2°. Il eſt encore évident que deux grandeurs ſont égales, quand elles ſont moyennes proportionelles entre les mêmes grandeurs [a] par conſéquent, ſi l'on démontre que les parallèlogrammes $BGDx$, $fGIO$, ſont l'un & l'autre moyens proportionels entre les mêmes grandeurs, on ſera convaincu que ces deux parallèlogrammes ſont égaux.

Remarquons donc que le parallèlogramme $BGbQ$ ou $GMrI$ (Art. 1.) eſt au parallèlogramme $BGDx$ de même baſe, :: $Gb. GD$: mais, en prolongeant GD juſqu'à la rencontre de la Tangente OV ; alors, à cauſe de l'Ordonnée Ib, tirée du Point de contingence I ſur le petit Axe, $Cb. GD :: GD. GV$ (58) :: $GD \times Dx. GV \times Dx$; c'eſt-à-dire, :: $BGDx. GVyS$; (parce qu'en prenant GV pour baſe du parallèlogramme $GVyS$, la Perpendiculaire Dx en eſt la hauteur) ; ainſi $BGbQ$ ou $GMrI. BGDx :: BGDx. GVyS$.

Pareillement, & préciſément par les mêmes raiſons, $GMrI. fGIO :: GM. Gf :: Gf. GS$ (54 & 100) :: $Gf \times Oa. GS \times Oa$; ainſi $GMrI. fGIO :: Gf \times Oa. GS. \times Oa$. Or $Gf \times Oa = fGIO$, & $GS \times Oa = GVyS$; parce que la Perpendiculaire Oa eſt la hauteur commune de ces parallèlogrammes ; donc $GMrI. fGIO :: fGIO. GVyS$. Ainſi

---

[a] Soient x, z, toutes deux moyennes proportionelles entre a & b ; je dis que $z = x$: car puiſque $a. x :: x. b$; donc $xx = ab$; de même ayant auſſi (ſupp.) $a. z :: z. b$, l'on aura encore $zz = ab$; donc $zz = xx$, & par conſéquent $z = x$.

les deux parallèlogrammes BGDx, fGIO, ſont l'un & l'autre moyens proportionels entre les deux mêmes grandeurs GMrI, GVyS; & par conſéquent ils ſont égaux (art. 2.); donc le quadruple LPxT du premier, eſt égal au quadruple KgON du ſecond; il faut donc conclure que *le rapport du Rectangle des deux Axes, circonſcrit à l'Ellipſe, au parallèlogramme de deux Diamètres quelconques conjugués, circonſcrit à la même Ellipſe, eſt un rapport d'égalité.*

Uſage de l'Ellipſe dans la Dioptrique, ou dans la conſtruction des Verres brûlans par réfraction, & d'autres inſtrumens, tels que les Lunettes qui ſervent à perfectionner la vûe, ou à en corriger les défauts.

110. LA *Dioptrique* eſt une Science, où l'on apprend les loix de la *Réfraction*. Il y a déja long-tems que l'expérience a démontré, qu'un rayon de lumière paſſant de l'air dans l'eau, dans le verre, ou en général, d'un milieu [*a*] plus rare dans un milieu plus denſe, changeoit de route ou de direction, à l'inſtant de ſon paſſage de l'un de ces milieux dans quelqu'un des autres. Un rayon de lumière AB (fig. 62.) qui paſſe obliquement en Ligne droite de l'air dans l'eau, ne ſuit pas à l'inſtant de ſon paſſage au Point B, le prolongement BL de la droite AB, mais il ſe

[*a*] On entend par *Milieu*, en Phyſique, tout eſpace que les corps peuvent traverſer dans leurs mouvemens: ainſi l'Air, l'Eau, le Verre, &c. ſont des *Milieux* de la lumière. Et l'on dit qu'un milieu eſt plus *rare* qu'un autre, quand le premier a moins de ſubſtance ou pèſe moins que le ſecond, l'un & l'autre ayant même volume. Ainſi un pouce cube d'air peſant moins qu'un pouce cube d'eau, on dit que l'air eſt un milieu plus *rare* que l'Eau. Pareillement le mercure ou le vif-argent eſt plus *denſe* que l'eau; parce que le premier pèſe plus que le ſecond, ſous un même volume.

rompt dans une Ligne droite comme BG, en s'approchant de la perpendiculaire CBD, élevée à ſon Point B d'incidence ſur l'eau; & au contraire, en paſſant de l'eau dans l'air, il ſe rompt en s'écartant de la perpendiculaire. Or c'eſt ce changement de direction que l'on appelle *Réfraction*, du latin *refrangere* rompre; parce que effectivement le rayon ABG paroît rompu ou plié en B.

111. Après cette obſervation, on chercha à s'aſſurer ſi cette Réfraction ne ſuivoit pas une loi, quelle que fût l'inclinaiſon du rayon AB ou SB à la perpendiculaire ou à l'*Axe de réfraction* CBD; & cette recherche valut à M. *Deſcartes* l'admirable découverte, avec laquelle ſon ſublime génie s'éleva a des inventions, que les races préſentes & futures ne pourroient méconnoître ſans avilir leur raiſon [a]. Car ABC étant l'Angle d'*inclinaiſon* du rayon AB; l'Angle SBC celui du rayon SB; DBG l'angle de *réfraction* du rayon AB, & DBI celui du rayon SB, il trouva, en décrivant un Cercle du Point B avec un rayon quelconque AB ou SB, que *le Sinus* SR *de l'Angle d'inclinaiſon* SBC *eſt toujours au Sinus* MI *de ſon Angle de réfraction* DBI, *comme le Sinus* AT *d'un autre Angle quelconque d'inclinaiſon* ABC *eſt au Sinus* GP *de ſon Angle de réfraction* DBG, ou que SR. MI :: AT. GP.

Vous en verrez la démonſtration, en liſant le Diſcours ou le Chapitre II. de ſa Dioptrique, & vous y admirerez ſans doute l'ingénieuſe & élégante théorie qui l'a conduit à cette belle invention; confirmée d'ailleurs par des expériences mille fois répétées par des mains très-ſçavantes & très-induſtrieuſes.

112. REMARQ. I. Quand le rayon AB paſſe de l'air dans l'eau; il eſt clair que l'Angle d'inclinaiſon ABC, ou ſon égal DBL eſt plus grand que ſon Angle de réfraction DBG; mais au contraire, ſi le rayon GB paſſe de l'eau dans l'air, l'Angle d'inclinaiſon DBG eſt plus petit que l'Angle de réfraction ABC. Nous appellerons dans la ſuite

[a] Voy. la Diſſertation du n°. 121.

rapport de réfraction, celui qui règne entre le Sinus de l'Angle d'inclinaiſon & le Sinus de l'Angle de réfraction. On a trouvé par expérience que dans le paſſage de l'air dans le verre, ce rapport étoit preſque celui de 3 à 2; & dans le paſſage du verre dans l'Air, qu'il ne différoit guères du rapport de 2 à 3.

De manière donc qu'en obſervant par expérience, le rapport du Sinus d'un Angle d'inclinaiſon quelconque à celui de ſon Angle de réfraction, on connoîtra, ſans autre travail & par une ſimple règle de trois, la valeur de l'Angle de réfraction correſpondant à une inclinaiſon quelconque. Suppoſons, par exemple, qu'un rayon de lumière ſoit tel, qu'en paſſant obliquement de l'air dans le verre, le Sinus de ſon Angle d'inclinaiſon ſoit au Sinus de ſon Angle de réfraction, comme 3 eſt à 2, ainſi que l'expérience le donne à très-peu près; ce rapport étant conſtant, ſuivant la découverte & la démonſtration de M. Deſcartes (111), ſi l'on veut que l'Angle d'inclinaiſon ſoit de 20^d, ſon Sinus que j'appelle a ſera connu par les tables; ainſi, pour avoir le le Sinus x de ſon Angle de réfraction, on fera cette proportion $3 . 2 :: a . x$; donc $x = \frac{2a}{3}$; lequel Sinus trouvé dans les tables vous fera connoître la valeur de l'Angle de réfraction; & par conſéquent la route que doit tenir le rayon après la réfraction.

113. REMARQ. II. Il n'y a que les rayons tombans obliquement ſur une ſurface réfringente, qui ſoyent ſoumis à la loi de la réfraction, l'expérience démontrant conſtamment qu'un rayon perpendiculaire ne ſe réfracte pas.

114. M. *Deſcartes* ayant trouvé par raiſonnement & par expérience, que le *rapport de Réfraction* étoit un rapport *conſtant*, il n'en fallut pas davantage à ce profond Géomètre, à ce Légiſlateur dans les hautes ſciences, pour déterminer la forme ou la courbure la plus avantageuſe que l'on devoit donner aux verres, deſtinés à corriger les défauts ou à augmenter la puiſſance de la vue; car voici comment il raiſonna.

Quand des yeux n'apperçoivent pas bien distinctement à 30 pieds de distance, un objet qu'il leur est aisé de bien discerner à 10 pieds, c'est que les yeux ne sont pas disposés pour recevoir les rayons, qui viennent de la première distance, de la même manière qu'ils le sont pour ceux qui partent de la seconde [*a*] : si je puis donc trouver un instrument, qui fasse que les premiers rayons entrent dans les yeux, comme s'ils venoient de la distance de 10 pieds; l'objet éloigné de 30 pieds sera distingué aussi parfaitement, que s'il n'étoit qu'à dix.

115. Pour y parvenir, supposons l'Ellipse AMB (fig. 63.) dont le grand Axe AB, & la distance Ff des Foyers soyent dans le *Rapport de la Réfraction*; c'est-à-dire, que AB. Ff :: 3. 2 (112) [*b*]; je dis que tous les rayons DM parallèles à l'Axe AB, en passant de l'air dans le solide de verre, engendré par la circonvolution de cette Ellipse autour de son grand Axe, seront nécessairement déterminés par la réfraction, à concourir au Foyer *f* le plus éloigné de l'objet d'où viennent les rayons.

Dém. Après avoir tiré la perpendiculaire LMH à la Courbe, ou à sa Tangente au Point M; & avoir pris DM = M*f*, pour décrire du Point M, avec le rayon M*f* ou DM, la circonférence *f*DT, il est évident que la perpendiculaire DL est le Sinus de l'Angle d'inclinaison DML, & que la perpendiculaire *f*H est le Sinus de l'Angle *f*MH. par conséquent, si nous démontrons que les Sinus DL, *f*H, sont dans le *rapport de la Réfraction*; DL étant le Sinus de l'Angle d'inclinaison DML, *f*H sera nécessairement celui de son Angle de réfraction; ainsi *f*MH sera l'Angle de réfraction de l'Angle d'inclinaison DML, c'est-à-dire, que le rayon DM ſera, en vertu de la réfraction au Point M, dirigé au Foyer *f*.

Or il est certain 1°. par la loi de la réfraction, que le

[*a*] On suppose dans tout ceci, que l'impuissance de l'œil ne vienne pas du défaut de lumière de la part de l'objet.

[*b*] Voyez n°. 117. comment se construit une pareille Ellipse.

rayon DM ne ſuivra point, à ſon paſſage de l'air dans le verre, le prolongement MR de la route DM; mais qu'il ſe rompra en s'approchant de la perpendiculaire LH (110); & qu'ainſi il paſſera entre cette perpendiculaire & le prolongement MR. 2°. En ſe dirigeant au Foyer *f*, le Sinus de l'*Angle d'inclinaiſon* & celui de l'*Angle de réfraction* ſeront préciſément comme ils doivent être, ſuivant la loi de la réfraction; c'eſt-à-dire, que DL. *f*H :: 3. 2. puiſque (41) DL. *f*H :: AB. *Ff*; or AB. *Ff* :: 3. 2 (conſt.); donc DL. *f*H :: 3. 2.

3°. Si le rayon DM ſe détournoit dans une autre Ligne que M*f*, il feroit avec la perpendiculaire LH à la Courbe, un Angle plus ou moins grand que l'Angle *f*MH; & & par conſéquent le Sinus de cet Angle ſeroit plus ou moins grand que le Sinus *f*H de l'Angle *f*MH. Donc DL ne pourroit pas être à cet autre Sinus :: 3. 2. Ainſi, pour ſuivre la loi de la réfraction, le rayon DM ne peut pas ſe détourner, à ſon paſſage de l'air dans le verre, ſans ſe diriger au Foyer *f*.

116. COROL. Le Point M ayant été pris à diſcrétion, il eſt clair que tous les rayons, qui rencontreront l'Ellipſoïde de verre parallèlement à ſon Axe AB, ſe réuniront tous au Foyer *f* au-dedans de ce ſolide. Donc, ſi du Point *f* & avec un rayon quelconque, on décrit un Arc de Cercle MSP, qui paſſe entre A & G, on aura une portion PAMSP de l'Ellipſe génératrice, laquelle tournant au tour de ſon Axe engendrera un Solide, qui aura la propriété de réünir, en un ſeul Point *f* dans l'air, tous les rayons parallèles à ſon Axe, par leſquels il ſera traverſé, lorſqu'ils paſſeront de l'air dans ſa ſubſtance.

Car le rayon OC, à ſon paſſage C de l'air dans le verre, quittera ſa direction C*x*, pour ſuivre celle qui conduit au Foyer *f* (115); donc, le Point *f* étant le centre de l'Arc MSP, cette dernière direction ſera dans un des rayons de cet Arc; mais tout rayon de Cercle eſt perpendiculaire à ſa circonférence; par conſéquent le rayon OC, après avoir été rompu en C, tombera perpendiculairement ſur l'Arc de

de Cercle MSP. Ainſi, en ſortant du verre dans l'air, il ne ſera point détourné de la direction C*f* (parce qu'un rayon qui paſſe perpendiculairement d'un milieu dans un autre plus rare ou plus denſe, n'y éprouve aucune réfraction (113)); donc le rayon OC ou tout autre ſemblable, qui s'eſt plié en entrant dans le verre propoſé, pour ſe diriger au Foyer *f*, y ſera encore dirigé à ſa ſortie du verre dans l'air. L'on a donc, par cette conſtruction, un verre brûlant très-parfait.

117. REMARQ. I. Pour faire que l'Axe AB d'une Ellipſe & la diſtance F*f* de ſes Foyers ſoyent dans le *rapport de la Réfraction*, ou que AB ſoit à F*f* :: 3. 2. il n'y a qu'à diviſer AB en trois parties égales; faire AF & B*f* égales chacune à la moitié de l'une de ces parties; & alors AB ſera évidemment à F*f* :: 3. 2. Or, ayant le grand Axe d'une Ellipſe & ſes Foyers, il eſt aiſé de conſtruire cette Courbe (Art. 2. du n°. 66.). Donc, &c.

118. REMARQ. II. L'expérience démontre que, plus un verre eſt épais, moins il eſt tranſparent (toutes choſes d'ailleurs égales); il paroît donc que des verres brûlans par réfraction, auront cette propriété à un dégré d'autant plus parfait, qu'ils ſeront plus minces. C'eſt une obſervation à laquelle les ouvriers qui travaillent ces ſortes de verres, doivent ſe rendre extrêmement attentifs.

119. Réciproquement, tous les rayons qui viendront du Foyer *f* dans l'air, traverſer le verre PAMSP, en ſortiront parallèles à ſon Axe AB.

DEM. Le rayon *f* M, dans ſon paſſage de l'Air dans le Verre, rencontrant perpendiculairement la ſurface circulaire MSP, ne s'y réfractera pas (113); il ne ſubira donc la loi de la réfraction, qu'au ſortir du Verre dans l'Air, du côté de D, pour s'écarter de la Perpendiculaire (110); en ſorte que DL. *f*H :: 3. 2 (111); or AB. F*f* :: 3. 2 (conſt.); donc DL. *f*H :: AB. F*f*. Mais, quand cela arrive, DM eſt néceſſairement parallèle à l'Axe AB (par la conv. du n°. 41.) donc, &c.

120. COR. Ainſi les rayons d'un corps lumineux, placé

au Foyer f, ſeroient propagés, au moyen d'un pareil Verre, à une très-grande diſtance avec aſſez de force, pour y faire diſcerner les objets.

121. Nous venons de conſidérer les rayons DM, OC, &c. (fig. 63.) parallèles à l'Axe AB de l'Ellipſoïde, dans le cas où ils rencontrent la convéxité de ce ſolide; ſuppoſons maintenant qu'ils en rencontrent la concavité PAM (fig. 64) toujours parallèlement à l'Axe BA. Je dis qu'en décrivant du Foyer f, avec un rayon un peu plus grand que fA, un Arc de Cercle OST; ſi l'on mène les Lignes OP, TM, &c. dirigées au Foyer f, la fig. OPAMTS engendrera, par ſa circonvolution autour de l'Axe AB, un ſolide qui fera que les rayons venans parallèlement à ſon Axe du côté de f, ſeront rendus divergens, après avoir traverſé un Verre de cette forme, comme s'ils partoient tous du même Point f.

DÉM. Reprenant la fig. 63. il eſt certain, ſuivant la loi de la réfraction, que le rayon RM, parallèle à BA, paſſant de l'Air dans le Verre, quittera ſa direction MD, pour ſe rompre dans une Ligne MV, en s'approchant de la Perpendiculaire HML à l'Ellipſe (110) [a]; c'eſt-à-dire qu'il s'écartera autant de ſa première direction en allant de R vers D, qu'il s'en eſt écarté, en venant du côté de D vers R (puiſque l'on ſuppoſe que c'eſt le même milieu); ainſi l'écartement ou l'Angle DMV = l'écartement ou l'Angle RMf; mais fMD + RMf = deux Angles droits; donc fMD + DMV = auſſi deux Angles droits; la Ligne MV eſt donc dans la même Ligne droite que fM (n°. 43. *Inſt.* T. 1.): par conſéquent les rayons RM, qui rencontrent la concavité de ce Verre Ellipſoïde parallèlement à ſon Axe, s'écarteront de leur direction en y entrant, ou deviendront divergens comme s'ils partoient du Foyer f.

Ainſi (fig. 64.) le rayon HM, en paſſant de l'Air dans le Verre QPAMTS, prendra, à l'inſtant de ſon paſſage par la concavité de ce ſolide, la direction MT tendante au Foyer f, centre de l'Arc de Cercle OST; le rayon MT tombera donc

[a] On ſuppoſe que l'on ait ſupprimé dans la fig. 63. l'Arc MSP, & que le rayon RM rencontre tout d'abord la Courbure elliptique.

perpendiculairement ſur l'Arc de Cercle OST, & n'y éprouvera aucune réfraction (113). Par conſéquent il ſortira du Verre dans l'Air, en ſuivant une direction TK, laquelle prolongée du côté de M tend directement au Foyer *f*; & c'eſt tout C. Q. F. D.

122. Cor. Par conſéquent, ſi un œil eſt diſpoſé pour voir d'une manière diſtincte un Point de quelque objet placé en *f*; & qu'il ne le ſoit pas pour le diſtinguer à une très-grande diſtance; comme les rayons, qui viennent d'un Point fort éloigné, ſont ſenſiblement parallèles (note du n°. 158. de la Parab.), en mettant entre cet œil & l'objet propoſé, un Verre tel que OPAMTS, dont la concavité Elliptique PAM ſoit tournée du côté de l'objet, & la convéxité circulaire OST du côté de l'œil, & qui outre cela ait ſon Foyer en *f*, on fera que les rayons, qui viendront de ce Point fort éloigné, entreront dans l'œil comme s'ils partoient du Foyer *f*; & qu'ainſi l'on aura remédié à cet égard au défaut de l'œil propoſé; c'eſt-à-dire que l'on aura une Lunette excellente pour ceux qui ont la vûe courte.

Rem. Voyez l'admirable Dioptrique de M. *Deſcartes*. Moyennant ce que je viens de dire, & le Coroll. VII. de la Propoſ. VI. de l'Ellipſe n°. 41. que j'ai expliqué fort au long, vous ſerez en état de comprendre toute la doctrine Géométrique, néceſſaire à l'intelligence de ſes belles inventions; dans l'art de perfectioner le Téleſcope & le Microſcope. Ne manquez pas d'y joindre ce que j'en explique à l'Article de l'Hyperbole, où il s'agit de montrer l'uſage de cette Courbe dans la conſtruction des Lunettes, & vous pourrez entamer la lecture de cet Ouvrage de M. *Deſcartes*. Quoiqu'il ait découvert le premier la vraie loi de la réfraction; que ſa Dioptrique ſoit la première production en ce genre, fondée ſur des principes inconteſtables; & qu'ainſi l'on ne dût pas s'attendre qu'une Science à ſa naiſſance fût portée bien loin, il ne paroît pourtant que c'eſt le plus profond & le plus ſublime Ouvrage qui ait été publié ſur cette matière. Je dirois preſque qu'il a le ſingulier mérite, de l'avoir à la fois inventée & finie.

Dissertation sur la Découverte de la Loi de la Réfraction.

123. L'opinion que l'on a de la capacité d'un peuple, est sans doute ce qui contribue le plus à le rendre respectable. La capacité ne peut mieux s'établir que par des découvertes ingénieuses, appliquées aux besoins de la Société; il n'est donc pas indifférent de connoître le véritable Auteur d'une invention.

La Dioptrique de M. *Descartes* commença à devenir publique en 1637. [a]: Jamais on n'avoit rien vû en ce genre, d'aussi solide dans ses principes, ni d'aussi ingénieux dans ses conséquences. Cette matière s'étoit présentée à lui sous un point de vûe si lumineux, qu'il en vit presque les limites dans le tems qu'il en jettoit les fondemens. Le Sçavant y est éclairé, l'Artiste y est conduit, & tout le genre humain servi.

Son édifice est fondé sur cette Proposition, que nous avons déja rapportée: *quelque soit l'Angle d'inclinaison ou d'incidence, lorsqu'un rayon de lumière passe d'un milieu dans un autre plus ou moins dense, le rapport du Sinus de son Angle d'inclinaison à celui de son Angle de réfraction est toujours le même*; c'est-à-dire, que *le Sinus d'un Angle d'inclinaison est au Sinus de son Angle de réfraction, comme le Sinus de tout autre Angle d'inclinaison quelconque est au Sinus de son Angle de réfraction.*

M. *Descartes* arrive à ce Théorême par une théorie fort ingénieuse, très-simple, & soutenue par la Géométrie. L'expérience la confirma, & tout à coup l'art d'avoir des yeux plus parfaits fut réduit en méthode infaillible; méthode dont le Philosophe François étoit inconteſtablement le père, si l'envie ne conteſtoit pas tout.

J'ai peu de chose à dire ici contre les Auteurs qui ont avancé, que *peut-être* il en étoit redevable à *Willebrord Snellius*, Hollandois, Contemporain de M. *Descartes*. Des doutes

[a] Vie de M. *Descartes* par *Baillet*.

peuvent ſervir la malignité, mais ils ne ſçauroient convaincre la raiſon. Arrêtons-nous à ceux qui ont affirmé ſans reſtriction, que M. *Deſcartes* avoit publié le premier la Loi de la réfraction; ſans parler de *Snellius*, dans les Manuſcrits duquel il avoit, dit-on, remarqué cette découverte.

C'eſt ſur ce pied que s'en eſt explique M. *Wolf* dans ſa Dioptrique. M. *Chambers* dans ſon Dictionaire Encyclopédique, écrit en Anglois, l'a très-éxactement répété au mot *Réfraction*; & M. de Voltaire l'a ſuppoſé, apparemment pour mieux chanter M. Newton. Citons les paroles du Poëte François, qu'on pourra lire aux pages 91. & 92. de ſes *Élémens de la Philoſophie de Newton*, première édition. » Snellius trouva le premier la proportion conſtante, ſui» vant laquelle les rayons ſe rompent dans les différens mi» lieux. On en fit honneur à *Deſcartes*. On attribue toujours » au Philoſophe le plus accrédité les Découvertes qu'il rend » publiques. Il profite des travaux obſcurs d'autrui, & il » augmente ſa gloire de leurs recherches. La découverte de » *Snellius* étoit alors un chef-d'œuvre de ſagacité, &c. «

Une accuſation de cette nature méritoit, pour le moins, que l'on s'appuyât de quelque autorité; mais, comme on n'en produit aucune, nous nous croyons obligés envers le public de faire ici les frais de cette recherche.

Il n'eſt point queſtion de ſçavoir ſi *Snellius* a pû découvrir, ou même, s'il a découvert le premier *la Loi de la Réfraction*. On eſt dans l'impoſſibilité de prouver un pareil fait. Combien de découvertes qui n'ont jamais été publiques, ou qui l'ont été trop tard! il s'agit uniquement de démontrer que M. *Deſcartes* a volé à *Snellius* ſa découverte, ou qu'il ne la lui a pas volée, expoſons les faits.

M. *Huyghens* dit, dans ſa Dioptrique, que M. *Deſcartes*, en paſſant en Hollande, vit *Snellius* [*a*], qui avoit beau-

[*a*] Ce fait me paroît douteux. On ſçait avec quel ſcrupule & quelle diffuſion M. *Baillet* a détaillé les circonſtances de la Vie de M. *Deſcartes*; néanmoins on n'y trouve nulle part l'entrevue de ces deux Philoſophes.

coup de Manuſcrits de ſa compoſition ſur la nature de la lumière, dans leſquels ſe trouvoit une Loi de la Réfraction, fort approchante de celle publiée par M. *Deſcartes* en 1637. que lui M. *Huyghens* a vû cette Loi énoncée dans leſdits Manuſcrits ; & que *peut-être* M. *Deſcartes* en a tiré la ſienne.

Mais, ſi M. *Deſcartes* a vû *Snellius*, *Snellius* a vû M. *Deſcartes*. Ils ſe ſont entendus réciproquement ; & juſques-là il eſt encore impoſſible de décider lequel des deux eſt le déprédateur. On ne dit point en quel tems préciſément ces Philoſophes ſe virent [*a*], ni ſi la Découverte en queſtion étoit faite en ce tems de part ou d'autre. Ce qu'il y a de bien ſûr, c'eſt qu'on en entendit parler pour la première fois en 1637. que M. *Deſcartes* la publia comme de lui dans ſa Dioptrique ; que perſonne ne la revendiqua ; que 24 ou 25 ans après, *Voſſius* ayant mis au jour ſon *Traité de la Lumière*, il y avoue qu'il étoit rédevable à *Snellius* de pluſieurs belles obſervations, entre leſquelles on trouve celle, que l'on prétend être la même que la propoſition de M. *Deſcartes* ; que *Voſſius* n'objecta point cette déprédation au Philoſophe François, quoiqu'il ſe fût déclaré contre ſa Dioptrique, & qu'il eût actuellement des démêlés avec lui ſur ce ſujet ; que Meſſieurs *Léibnits* & *Bernoulli* ne parlent du Théorême de *Snellius* que ſur la foi de *Voſſius* ; & qu'enfin l'on ignore où ſe trouvent imprimés les Livres d'Optique de *Snellius*, ou même s'ils ſont imprimés.

Je demande préſentement, ſi la Découverte de *Snellius* avoit été publiée en 1637. & qu'on l'eût retrouvée dans un Ouvrage de M. *Deſcartes*, imprimé pour la première fois en 1662. [*b*] ou devenu alors d'une notoriété publique, n'eſt-il pas évident que, ſuivant toutes les voyes légitimes de juger, l'honneur de la Découverte ſeroit & devroit être attribué à *Snellius* ? donc, puiſque M. *Deſcartes* eſt le pre-

[*a*] Snellius eſt mort en 1626. *Baillet*, *Vie de Deſcartes*.
[*b*] C'eſt la date de la première édition du Livre *De naturâ lucis* de *Voſſius*.

mier en date, l'équité naturelle éxige qu'on ne le trouble point dans ſa poſſeſſion, par des *peut-être* moyennant leſquels il ſeroit impoſſible, de jamais compter ſur aucune propriété.

Mais, il y a plus. Les bons eſprits apperçoivent par la méthode de procéder dans une recherche, ſi l'on a dû arriver à quelque production qui y tenoit. Or, de la manière dont M. *Deſcartes* entre en matière & traite ſon ſujet, on preſſent qu'il en va naître des coups de lumière; au lieu que *Snellius*, de l'aveu même des adverſaires de M. *Deſcartes*, ne fondoit ſa Découverte que ſur des expériences [*a*], dont l'extrême délicateſſe pouvoit faire ſoupçonner la ſolidité. Je n'en produirai qu'un éxemple fort connu à ceux qui ſçavent un peu les Élémens de Géométrie.

Un homme dit qu'il a une méthode, fondée ſur l'expérience, d'inſcrire un Poligone régulier de 15 côtés dans un cercle quelconque; que cette méthode lui réuſſit toujours; & que, pour s'en convaincre, on n'a qu'à en faire l'épreuve. Mais, à moins qu'on ne ſoit fort ſtilé dans ces opérations, on ſçait que ſur dix tentatives, ſouvent il n'y en a pas une qui réponde juſte à toute rigueur. Ainſi, à ne s'en tenir qu'à l'expérience, il y a pour le moins 9 degrés de certitude contre 1, que la méthode propoſée n'eſt pas éxacte.

Je ne vois qu'un moyen de lever ici tous les doutes, de raſſurer la main du Praticien, & de le faire revenir conſtamment ſur ſes pas; c'eſt d'éclairer ou de convaincre ſon entendement par une Démonſtration bien complette. Alors, quand il ne réuſſira pas, il n'y aura plus moyen de s'en prendre à la méthode, mais uniquement à la manière de s'en ſervir. Or c'eſt préciſément ce qu'a fait M. *Deſcartes* dans la queſtion que nous traitons. Sa propoſition eſt prouvée indépendamment de toute expérience. Ainſi il a encore, à cet égard, la ſupériorité de génie ſur *Snellius*.

[*a*] Quod profectò experientiâ ipſi notum erat. *Huygens* in Dioptrica.

Le Lecteur ſera peut-être inquiet de ſçavoir, comment on démontre que la propoſition de *Snellius* eſt, à peu de choſe près, la même que celle de M. *Deſcartes*. Soit donc NQTZ (fig. L. PL. 5.) le profil d'un vaſe rectangulaire rempli d'eau. Au fond de ce vaſe ſont les objets C, T, d'où l'on a élevé les Perpendiculaires CG, TZ, ſur QT. Placez un œil en K dans l'air; l'objet C lui paroîtra s'élever, comme en D, ſur la Perpendiculaire CG. par le Point d'incidence B de la ſurface réfringente, menez les Lignes KD, BC. *Snellius* appelle BC *le rayon vrai*; parce qu'effectivement ſans eau, l'objet ne ſeroit apperçu qu'en C; & il nomme BD *le rayon apparent*, l'image de C ne paroiſſant en D, où l'objet n'eſt pas, qu'en vertu de la réfraction. Maintenant, après avoir meſuré très-éxactement les rayons BC, BD, que le même œil regarde plus obliquement l'objet T pareil au précédent; & il le verra s'élever, comme en V, ſur la Perpendiculaire TZ; que l'on meſure le *rayon vrai* RT, ainſi que le *rayon apparent* RV, & voici quelle eſt la propoſition de *Snellius*: J'ai toujours trouvé, dit-il, que *le rayon vrai* BC *étoit à ſon rayon apparent* BD, *comme le rayon vrai* RT *eſt à ſon rayon apparent* RV; *quelle que ſoit l'inclinaiſon des rayons vrais ſur* QT. La propoſition de M. *Deſcartes* porte que *le Sinus d'un Angle d'inclinaiſon d'un rayon de lumière, qui paſſe d'un milieu dans un autre plus ou moins denſe, eſt au Sinus de ſon Angle de réfraction, comme le Sinus de tout autre Angle d'inclinaiſon quelconque eſt au Sinus de ſon Angle de réfraction.* Enſorte que, ſuivant *Snellius*, le rayon vrai & ſon rayon apparent ſont *en raiſon conſtante*, quelle que ſoit l'obliquité de l'aſpect; &, ſelon M. *Deſcartes*, ce ſont les Sinus des Angles d'inclinaiſon & de réfraction, qui ont reſpectivement cette propriété.

Il ſemble d'abord qu'il y ait une grande différence dans l'énoncé de ces propoſitions. M. *Leibnits* même, tout pénétrant qu'il étoit, ne les faiſoit rentrer l'une dans l'autre qu'avec aſſez de peine. On peut cependant les déduire réciproquement l'une de l'autre avec une extrême facilité. Par les Points B, R, menons les Perpendiculaires MH, QF,

à la ſurface réfringente NZ. Puiſque les rayons CB, TR, quittent leurs directions CA, TI, aux Points B, R, de leur paſſage dans l'air, pour s'écarter des Perpendiculaires MH, OF, dans les Lignes BK, RK, dont BD, RV ſont les prolongemens reſpectifs (ſupp.); il eſt clair que HBC, FRT, ſont les Angles d'inclinaiſon; que KBM ou HBD eſt l'Angle de réfraction de HBC, & que KRO ou FRV eſt l'Angle de réfraction de FRT.

Cela ſuppoſé, je dis que, ſi l'on a, ſuivant *Snellius*, cette proportion *le rayon apparent* BD *eſt au rayon vrai* BC, *comme le rayon apparent* RV *eſt au rayon vrai* RT, l'on aura, ſelon M. Deſcartes, *le Sinus de l'Angle d'inclinaiſon* HBC *eſt au Sinus de ſon Angle de réfraction* HBD, *comme le Sinus de l'Angle d'inclinaiſon* FRT *eſt au Sinus de ſon Angle de réfraction* FRV.

DÉM. Soit S le caractère du Sinus d'un Angle, & conſidérant les rayons apparens & les vrais dans les Triangles BCD, RTV, rappellons-nous que les côtés des Triangles ſont entr'eux, comme les Sinus des Angles oppoſés à ces côtés; donc BD. BC :: SBCD ou SHBC. SBDC ou SBDG = SHBD. Et RV. RT :: SRTV ou SFRT. SRVT ou SRVZ = SFRV. Or (ſupp.) BD. BC :: RV. RT. Par conſéquent SHBC. SHBD :: SFRT. SFRV. C. Q. F. D.

Réciproquement la propoſition de *Snellius*, peut ſe déduire avec la même facilité de celle de M. *Deſcartes*. Mais, parce qu'on démontre que *les trois Angles d'un Triangle ſont égaux à deux droits*, en ſe ſervant de l'*égalité des Angles alternes dans le parallèliſme de deux Lignes*, s'enſuit-il que l'Auteur de cette dernière propoſition, le ſoit auſſi de la première? On ne le pourroit pas même conclure, quand les deux propoſitions ſeroient abſolument identiques. Il n'eſt pas rare, ſans s'être rien communiqué, d'aboutir aux mêmes vérités, lorſque l'on ſpécule ſur le même ſujet; & quelquefois préciſément par le même chemin. Cela m'eſt arrivé à moi-même pluſieurs fois dans cet Ouvrage.

Ce qui auroit dû, ce me ſemble, retenir la plume de ceux qui ont oppoſé ici *Snellius* à *Deſcartes*; c'eſt que la

Découverte vraie ou prétendue de *Snellius* a été tout-à-fait ſtérile entre ſes mains, & qu'il n'avoit pas pénétré fort loin dans la Science de la réfraction. Au contraire celle de M. *Deſcartes* nous a valu une des plus belles Sciences & des plus utiles que l'eſprit humain ait jamais inventées. Mon garant pour les faits ſera M. *Huyghens*, dont Meſſieurs *Wolf*, *Chambers*, & *Voltaire*, n'ont pas imité la modération. Parcourez la page 2 & 3 de ſa Dioptrique Latine, imprimée à *Amſterdam* en 1728. vous y verrez qu'après avoir énoncé la Loi de la Réfraction de M. *Deſcartes*, & attribué quelque choſe de ſemblable à *Snellius*, il ajoute ces paroles remarquables : *Verùm ad hanc ſinuum proportionem nequaquam attendit Snellius, & uſque adeò ab apparente imagine rem omnem pendere exiſtimavit, ut etiam in radio perpendiculari effectum refractionis, ſeu, ut falsò opinatur, decurtationem radii viſorii agnoſcat; deceptus eo quod etiam rectà de ſuper in vas aquâ plenum inſpicienti, fundus omni parte attolli videtur. Cujus rei verâ cauſa ex radiis ad utrumque oculum tendentibus petenda erat. Hæc omnia, quæ de refractionis inquiſitione volumine integro Snellius expoſuerat, inedita manſere, quæ & nos vidimus aliquando, & Carteſium quoque vidiſſe* accepimus; *ut hinc*, Fortaſſe *menſuram illam, quæ in ſinibus conſiſtit, elicuerit, quâ in explicandâ iride & vitrorum figuris inveſtigandis feliciſſimè eſt uſus.*

Par où l'on voit la circonſpection de M. *Huyghens* dans ſes conjectures. La propoſition de M. *Deſcartes* revient, ſelon lui, (& c'eſt auſſi mon ſentiment) à celle de *Snellius*; mais celui-ci n'y a pas fait attention, *nequaquam attendit.* Il a même crû fauſſement que le rayon perpendiculaire ſe réfractoit, *falſo opinatur.* L'Ouvrage de *Snellius* n'avoit point encore été imprimé, lorſque M. *Huyghens* en parloit, *inedita manſere.* Il aſſure qu'il en avoit vû le Manuſcrit, *vidimus*; qu'on lui avoit dit que M. *Deſcartes* l'avoit vû auſſi, *accepimus Carteſium vidiſſe*; que *peut-être* la Loi des Sinus, &c. découverte par celui-ci, avoit été occaſionnée par celle de *Snellius*, *fortaſſe elicuerit.* Et qu'enfin M. *Deſcartes* avoit très-heureuſement appliqué ſa Découverte à

l'explication de l'Arc-en-Ciel ainſi qu'à la recherche de la forme des verres, dont on a beſoin dans la conſtruction des Lunettes, des Microſcopes, & des Téleſcopes, *feliciſſime eſt uſus.* Concluons donc que les ſoupçons en faveur de *Snellius* ont même de mauvais fondemens, & que toutes les raiſons ſont pour M. *Deſcartes.*

124. USAGE *de l'Ellipſe dans la conſtruction du Porte-voix.* Nous avons vu n°. 154 de la Parabole, que cette Courbe étoit fort propre à la conſtruction du Porte-voix ſimple, mais elle ne paroît pas ſuffire, pour la plus grande perfection de cette machine. Non ſeulement il eſt néceſſaire que les *rayons ſonores* ſoyent dirigés le plus préciſément qu'il eſt poſſible, vers un endroit propoſé (ce à quoi la Parabole eſt d'un excellent uſage); mais il ſeroit avantageux que l'air s'accélérât dans le Porte-voix, ſans nuire au Parallèliſme des Lignes vocales. Quand on parle dans un Paraboloïde concave, l'air ne s'y trouvant arrêté que par les parois de l'inſtrument, qui lui laiſſent la liberté de s'étendre, s'y condenſe très-peu. Ainſi ſes reſſorts ſe déployant lentement, ne contribuent pas à la propagation de la voix, autant que l'art nous le fait concevoir poſſible.

Pour approcher donc de la perfection à laquelle nous tendons, ſoit l'Ellipſoïde *Af* (fig. 65.) adapté au Paraboloïde *f*T; de manière que ces deux conoïdes ayent un Foyer commun *f*, & que l'autre Foyer de l'Ellipſoïde ſoit dans l'embouchûre, à l'endroit où l'on doit parler. Il eſt évident que les rayons ſonores *Ab*, *Ar*, partans du Foyer A, ſeront réfléchis à la rencontre de l'Ellipſoïde, à ſon autre Foyer *f* (36); que par conſéquent leur action mutuelle les uns ſur les autres les condenſera en cet endroit; d'où ne pouvant revenir vers A, où la voix fait obſtacle, ils ſeront forcés de ſe précipiter dans la Paraboloïde en *d*, *g*; alors, en vertu de la forme de l'inſtrument, ils prendront un cours *ds*, *gr*, parallèle à ſon Axe AT (n°. 82 de la Parabole); & iront ainſi de concert porter la parole plus loin & avec plus de diligence, que ſi le Porte-voix étoit ſimple.

125. REMARQ. Il n'y a que l'expérience qui puiſſe déterminer ici la longueur & la groſſeur de l'Ellipſoïde, ainſi que le rapport de ces deux dimenſions; mais ce premier conoïde une fois ſuppoſé, régle néceſſairement le volume du ſecond que l'on peut faire d'ailleurs auſſi long que la commodité le permettra. Car le Foyer *f* de l'Ellipſoïde devant être commun au Paraboloïde qui lui eſt adapté, on voit que l'Ordonnée ou la double Ordonnée à ce Foyer eſt la même dans l'un & l'autre conoïde : mais la double Ordonnée au Foyer d'une Parabole, eſt toujours égale au Paramètre de cette Courbe (93. de la Parabole); & ſa conſtruction ſe régle ſur la longueur de ſon Paramètre (24. Parab.). par conſéquent la ſeconde pièce du Porte-voix compoſé eſt déterminée par la première.

126. On eſt quelquefois obligé dans les Arts de travailler ſur de très-petites parties, à la lueur d'une lampe, d'une bougie, ou d'une chandelle, dont la ſimple lumière n'éclaire pas aſſez; ſans augmenter le nombre des bougies, dont la multitude deviendroit incommode & diſpendieuſe, on pourroit ſe ſervir d'un Ellipſoïde concave, dont les côtés ſeroient étamés & très-liſſes. En ſuppoſant ce conoïde tronqué du côté de *f*, afin que l'on pût faire tomber où l'on voudroit ce Foyer, qui ſeroit alors en plein air; on conçoit que les rayons d'un corps lumineux placé au Foyer A & réfléchis en *f* (56), augmenteroient conſidérablement la lumière en ce Point, & par conſéquent y feroient diſcerner à de bons yeux, des corps d'une petiteſſe exceſſive.

127. Ce conoïde eſt encore d'un très-bon uſage dans la conſtruction artificielle des échos *à voix baſſe*. On appelle ainſi un *écho*, qui ne ſe fait entendre que quand on parle bas. Si l'on conſtruit donc une voute ou le platfond d'un appartement en forme d'Ellipſoïde concave, quelqu'un qui parlera fort bas au Foyer A, ſe fera entendre fort diſtinctement à une oreille attentive au Foyer *f*; ſans que des perſonnes, placées entre ces deux Points, & néanmoins à quelque diſtance, y puiſſent diſtinguer la moindre pa-

role. Ce dont j'ai fait l'expérience pluſieurs fois, tant à l'Obſervatoire de *Paris* que chez M. *Pagni* de la même Ville, lequel a un talent diſtingué pour ce qui concerne les expériences de Phyſique, où il fait paroître ſa dextérité avec beaucoup de ſuccès.

La raiſon en eſt que les Lignes vocales *Ab*, *Ac*, vont du Foyer A ſe réfléchir, à la rencontre de la voute ou de la courbure ſupérieure, à l'autre Foyer *f* où l'on ſuppoſe une oreille placée. Leur réünion en *f* eſt donc la cauſe pour laquelle la voix baſſe, qui part du Foyer A, eſt entendue en *f*; tandis qu'aux autres endroits entre A & *f*, où ne ſe fait point la réünion des Lignes vocales, elles n'ont pas aſſez de force pour ébranler les oreilles des Auditeurs.

128. REMARQ. Ces ſortes d'échos ne paroiſſent répéter que les voix baſſes; parce qu'en parlant haut, comme la diſtance entre les Foyers ne peut pas être conſidérable, vu la difficulté de la conſtruction, la voix & l'*écho* frappent l'oreille en même tems. Mais la voix étant communément plus forte que ſon écho, il arrive que ce dernier eſt couvert par l'autre, & qu'ainſi il n'eſt pas poſſible de le diſtinguer. Au contraire, quand on parle très-bas, la voix ne faiſant pas d'impreſſion ſenſible ſur l'oreille, laiſſe entendre l'écho, qui y en fait une aſſez grande par la réünion des Lignes vocales, dont nous avons parlé.

129. USAGE *de l'Ellipſe dans la conſtruction des Cornets acouſtiques.* Il me ſemble qu'un tube Ellipſoïde, à peu près ſemblable à la figure 66, ſeroit beaucoup plus propre à la conſtruction des *Cornets acouſtiques*, que le Paraboloïde dont il a été fait mention au n°. 157. de la Parabole; ſurtout en lui donnant une embouchure, qui s'adaptât très-exactement, comme celle du Porte-voix, à la bouche de celui qui parleroit au Foyer A; alors les Lignes vocales ſeroient toutes forcées d'enfiler le corps de l'inſtrument; & après avoir été réfléchies de deſſus les parois intérieures *cd* à l'autre Foyer *f* (36), où elles ne manqueroient pas de ſe condenſer, leurs reſſorts ne pouvant ſe déployer que du côté du Porte-vent M, elles s'y porteroient avec impé-

ruosité, & seroient par conséquent en état d'occasionner sur le timpan de l'oreille, un plus fort ébranlement qu'à l'ordinaire, car c'est tout ce que l'on se propose d'opérer avec de pareils instrumens.

130. Ce Cornet acoustique, en forme d'Ellipsoïde, me paroît avoir deux avantages sur le Paraboloïde. 1°. Parce que l'embouchure du Paraboloïde, ne s'adaptant point exactement à la bouche, laisse échapper un très-grand nombre de rayons sonores, qui ne sont point portés dans le corps de l'instrument. 2°. Parce qu'il n'y a que les rayons parallèles qui se réfléchissent précisément au Foyer du Paraboloïde. Or le nombre de ces rayons doit être assez petit; parce qu'ils sortent presque toujours de la bouche, en s'épanouissant en forme d'aigrette, & par conséquent fort éloignés d'être parallèles.

131. USAGE *de l'Ellipse dans la construction & le calcul des voutes surbaissées.* Une *voute* est un toit concave intérieurement, arrondi ou en forme d'arcade dans toute sa longueur; lequel présente au-dehors une apparence semblable à la figure BCGH. (fig. 67.) Les murs qui la portent, tels que ABHL, en sont les *pieds droits*; & l'on nomme *pignons* ceux qui la ferment comme ABCD. Il peut y avoir autant de *voutes* d'espèces différentes, qu'il y a d'espèces de Courbes toujours concaves du même côté. Les plus communes sont *à plein cintre*, *en tiers Point* ou *en Arc de cloître*, & celles que l'on nomme *surbaissées*. Les voutes *à plein cintre* sont celles dont la coupe verticale BMC est un *demi-Cercle*; car il est évident que la voute ne commence à s'élever que de l'horisontale BC, que l'on appelle pour cette raison *naissance de la voute*. Dans les voutes *en tiers Point* cette coupe est presque *triangulaire*; & elle forme une *demi-Ellipse* dans les voutes *surbaissées* dont il s'agit ici.

132. Pour la construction des voutes, il faut sçavoir qu'elles sont composées de *vousoirs*; ce sont des pierres ou des matériaux quelconques, taillés en espéce de coin tronqué, & propres à former le cintre ou le contour d'une voute. Il est donc nécessaire que l'extrémité de chaque

voussoir, qui compose la surface intérieure d'une voute *surbaissée*, soit taillée en Arc d'Ellipse; de manière que les extrêmités réünies de tous les *voussoirs* mis en place, forment une demi-Ellipse dont la *naissance* BC de la voute soit le grand Axe : or nous avons vu (*66*) comment on pouvoit tracer une Ellipse; on pourra donc faire prendre aux voussoirs une forme Elliptique, pour en construire une voute qui sera d'autant plus surbaissée, que le second Axe sera plus petit par rapport au grand [*a*].

133. On toisera la solidité ou la maçonnerie de cette voute, en déterminant d'abord la surface de la demi-Ellipse BOCB (cor. du n°. *68*. ou n°. 74) : après quoi on la multipliera par la Ligne BH, qui désigne toute l'étendue de la voute entre les pignons, & que les Architectes appellent pour cette raison *longueur dans œuvre*; ce produit donnera la solidité de la voute, comme si elle étoit pleine depuis sa *naissance*; c'est pourquoi l'on dit alors que l'on toise *tant plein que vuide*. Mais il en faut retrancher le creux ou le vuide, dont la coupe est la demi-Ellipse inférieure BMCB; on multipliera donc cette demi-Ellipse par la même *longueur dans œuvre* BH; ayant par là le toisé du vuide de la voute, on l'ôtera du premier toisé *tant plein que vuide*; & l'on aura un reste qui sera évidemment la solidité de la voute, dont l'épaisseur est comprise entre les deux Lignes BOC, BMC.

Je ne parle point du toisé des pieds droits ni de celui des pignons; ce sont des *Parallèlipipédes* qui se calculent aisément par la Géométrie commune.

[*a*] Si les circonstances le permettent, je traiterai la matière des *Voutes* plus à fond dans un autre Volume, où je ferai voir l'application des Courbes à la coupe des Pierres. Ce que j'en dis ici n'est que pour faire sentir de bonne heure la nécessité, dans l'Architecture, de sçavoir décrire l'Ellipse, & en calculer la surface.

De l'Hyperbole.

1. DÉFINITION. Soyent les Cercles RST, LMV (fig. 68.) parallèles entr'eux, coupans perpendiculairement le *Triangle par l'Axe* d'un cône ERT, dont ils ſont des ſections. Suppoſons auſſi que ce même cône ſoit coupé par un autre plan, perpendiculaire au Triangle ERT, & tel que coupant les deux plans circulaires RST, LMV, ainſi qu'un côté ET du cône, ſon prolongement coupe le cône oppoſé E*yx*, il en naîtra une troiſiéme ſection OBS, à laquelle les Anciens ont donné le nom d'*hyperbole*. Nous en dirons la raiſon au n°. 39.

2. COR. I. Il eſt clair par la conſtruction, & par tout ce que nous avons dit au commencement de la *Parabole* & de l'*Ellipſe*, que OS eſt perpendiculaire au Diamètre RT, ainſi qu'à la commune ſection BG de l'*hyperbole* & du *Triangle par l'Axe*; & qu'elle eſt par conſéquent coupée en deux parties égales en G. Par les mêmes raiſons, MH eſt perpendiculaire au Diamètre VL ainſi qu'à BG, & coupée en deux parties égales en P; de manière qu'en faiſant pluſieurs coupes circulaires, comme LMV, entre le *Sommet* B de l'hyperbole & la *Baſe* RST du cône, toutes les communes ſections de ces Cercles & de l'hyperbole, ſeroient coupées en deux également, & perpendiculaires à BG, commune ſection de l'hyperbole & du Triangle par l'Axe; ainſi que le ſont OS, HM.

3. COR. II. Puis donc que OS, MH, & toutes les autres communes ſections ſemblables, ſont coupées en deux parties égales par la commune ſection BG, & perpendiculaires à cette commune ſection, il s'enſuit que BG eſt l'*Axe* de l'hyperbole (conformément aux définitions que nous en avons données pour la Parabole & l'Ellipſe); les Lignes PM ou PH, GS ou OG en ſont les *Ordonnées*; BP, BG, les *Abciſſes*. De plus la portion AB de l'Axe, prolongé

longé jusqu'à la rencontre A du cône opposé, s'appelle *Axe transverse*, ou *premier Axe*, rélativement à un autre Axe que nous déterminerons bien-tôt; & l'on nomme *centre* de l'hyperbole le milieu C de l'Axe transverse; enfin nous appellerons *Axe intercepté* une portion quelconque AP ou AG de l'Axe prolongé, comprise entre le Point A & la rencontre d'une Ordonnée quelconque PM ou GS.

4. PROP. I. Dans l'hyperbole les quarrés des Ordonnées sont entr'eux, comme les Rectangles des Abcisses par l'Axe intercepté, correspondant à ces Abcisses; c'est-à-dire, que $\overline{GS}^2 . \overline{PM}^2 :: BG \times AG . BP \times AP$.

DÉM. Les Triangles semblables AGR, APL, donnent AG, GR :: AP. PL (M); & des Triangles semblables BGT, BPV, l'on tire BG. GT :: BP. PV (N): ainsi, en multipliant par ordre les termes des proportions M, N, on aura BG × AG. GT × GR :: BP × AP. PV × PL, ou, en alternant, GT × GR. PV × PL :: BG × AG. BP × AP (Q): mais, par la nature du Cercle, $GT \times GR = \overline{GS}^2$, & $PV \times PL = \overline{PM}^2$; donc, en substituant ces valeurs dans la proportion Q, elle deviendra $\overline{GS}^2 . \overline{PM}^2 :: BG \times AG . BP \times AP$. C. Q. F. D.

5. COR. I. Il s'ensuit de cette propriété de *l'hyperbole*, que le Périmètre de cette section est une Courbe. Ce que l'on démontrera, comme l'on a fait pour la Parabole n°. 9.

* 6. II. En prolongeant du côté de A le plan coupant, qui a formé l'hyperbole LBM (fig. 69.), il engendrera dans le cône opposé une autre section *l*A*m*, laquelle sera non seulement une *hyperbole*, suivant la définition, mais elle sera encore précisément égale & semblable à l'hyperbole LBM: or ces deux hyperboles, considérées ensemble, s'appellent *hyperboles opposées*.

DÉM. Pour démontrer l'égalité & la similitude de ces hyperboles, il suffit de faire voir que les Ordonnées prises de part & d'autre à égale distance du Sommet de ces Courbes, sont parfaitement égales. Et, comme cela paroî-

tra ſans doute tout-à-fait évident, lorſque la coupe T*t* eſt parallèle à l'Axe OQ, prenons le cas le plus difficile; c'eſt-à-dire, celui du Triangle Scalène, où l'Axe OQ eſt oblique aux Baſes oppoſées DH, *dh*, & dans lequel la ſection P*p*, qui engendre les hyperboles oppoſées, n'eſt pas parallèle à l'Axe OQ, c'eſt pourquoi tirant par le Sommet C la Ligne *sf*, parallèle à la ſection génératrice P*p*, & faiſant l'Abciſſe B*r* = l'Abciſſe A*p*, la démonſtration ſe réduit à prouver que les Ordonnées correſpondantes *ri*, *pm*, ſont égales.

A cauſe de C*f* parallèle à BP (conſt.); les Triangles ſemblables BPH, C*f*H, donnent; BP. PH :: C*f*. *f*H (M); & des Triangles ſemblables APD, C*f*D, on tire AP. PD :: C*f*. *f*D. (N); donc, en multipliant par ordre les termes des deux proportions M, N, on aura BP × AP. PH × PD ou $\overline{PM}$ :: C*f*. *f*H × *f*D (L).

Remarquez maintenant que les cônes oppoſés CDH, C*dh*, ayant tous leurs côtés égaux, chacun à chacun, c'eſt-à-dire, CD = C*d*; CH = C*h*, & l'Angle DCH = *d*C*h*, la Baſe DH = la Baſe *dh*; d'où il eſt clair que *f*H = *sh*; C*f* = C*s*, & *f*D = *sd*.

Après cela, les Triangles A*pd*, C*sd*, étant ſemblables, A*p*. *pd* :: C*s*. *sd* :: C*f*. *f*D; ainſi A*p*. *pd* :: C*f*. *f*D (H). Et les Triangles ſemblables B*ph*, C*sh*, donnent B*p*. *ph* :: C*s*. *sh* :: C*f*. *f*H; donc B*p*. *ph*. :: C*f*. *f*H (K); ainſi, en multipliant par ordre les termes des deux proport. H, K, on a A*p* × B*p*. *pd* × *ph* ou $\overline{pm}$ :: C*f*. *f*H × *f*D (T); donc, en comparant les deux proport. L, T, on trouvera A*p* × B*p*. $\overline{pm}$ :: BP × AP. $\overline{PM}$. Or (4) BP × AP = $\overline{PM}$ :: B*r* × A*r*. $\overline{ri}$; donc A*p* × B*p*. $\overline{pm}$ :: B*r* × A*r*. $\overline{ri}$, ou, en alternant, A*p* × B*p*. B*r* × A*r* :: $\overline{pm}$. $\overline{ri}$; mais A*p* étant = B*r* (conſt.), il s'enſuit que B*p* = A*r*; & qu'ainſi A*p* × B*p* = B*r* × A*r*; par conſéquent $\overline{pm}$ = $\overline{ri}$, ou *pm* = *ri*. C. Q. F. D.

7. PROB. II. Si, après avoir trouvé (fig. 68.) un quatriéme,

terme *tt* proportionel aux trois grandeurs BP × AP, $\overline{PM}^2$, $\overline{AB}^2$ [*a*], l'on cherche un autre quatriéme proportionel *pp* à trois autres grandeurs quelconques ſemblables BG × AG, $\overline{GS}^2$, $\overline{AB}^2$, de l'hyperbole, je dis que l'on trouvera toujours le même quatriéme proportionel ; c'eſt-à-dire, que $tt = pp$.

Dém. Par la Prop. I. BP × AP. BG × AG :: $\overline{PM}^2$. $\overline{GS}^2$, ou en alternant, BP × AP. $\overline{PM}^2$ :: BG × AG. $\overline{GS}^2$. Mais (ſupp.) BP × AP. $\overline{PM}^2$ :: $\overline{AB}^2$. *tt* ; donc $\overline{AB}^2$. *tt* :: BG × AG. $\overline{GS}^2$; or (ſupp.) BG × AG. $\overline{GS}^2$ :: $\overline{AB}^2$. *pp*. donc $\overline{AB}^2$. *tt* :: $\overline{AB}^2$. *pp*. & par conſéquent $tt = pp$. C. Q. F. D.

8. Cor. Le quarré *tt*, quatriéme proportionel au Rectangle d'une Abciſſe quelconque BP d'une hyperbole par ſon *Axe intercepté* AP, au quarré de ſon Ordonnée correſpondante PM, & au quarré de ſon *Axe tranſverſe* AB, eſt donc une grandeur *conſtante*, & par conſéquent ſa racine quarrée *t* eſt auſſi une *conſtante*.

* 9. Remarq. Pour trouver la grandeur *t* dans le cône (fig. 69.), il n'y a qu'à faire paſſer un plan par le Sommet C, parallèlement à la ſection génératrice P*p*, & perpendiculairement au plan du Triangle par l'Axe CDH ; c'eſt-à-dire, tirer C*f* parallèlement à P*p*, & mener l'Ordonnée *fe* au Cercle. Car la quatriéme proportionelle *p* aux trois grandeurs C*f*, *fe*, AB, ſera la valeur de *t*. Ainſi, il faut

[*a*] Pour trouver ce quarré *tt* quatriéme proportionel, on transformera le Rectangle BP × AP en un quarré DD, en cherchant une moyenne proportionelle D entre BP & AP ; après quoi déterminant le quatriéme portionel aux trois grandeurs D, PM, AB, ce ſera le côté du quarré cherché. Car, puiſque D. PM :: AB. *t*, on aura DD ou BP × AP. $\overline{PM}^2$ :: $\overline{AB}^2$. *tt*. C. Q. F. T. & D.

démontrer que, si l'on fait $\overline{Cf}.\overline{fe}$ :: AB. p, l'on aura $p = t$.

DÉM. Puisque $\overline{Cf}.\overline{fe}$ :: AB. p. (supp.); donc $\overline{Cf}^2.\overline{fe}^2$ :: $\overline{AB}^2.pp$. Or (n°. 6. proportion L) $\overline{Cf}^2.\overline{fH} \times \overline{fD}$ ou $\overline{fe}^2$ :: $\overline{BP} \times \overline{AP}.\overline{PM}^2$; donc $\overline{AB}^2.pp$ :: $\overline{BP} \times \overline{AP}.\overline{PM}^2$. Mais (supp.) $\overline{BP} \times \overline{AP}.\overline{PM}^2$ :: $\overline{AB}^2.tt$. Ainsi $\overline{AB}^2.pp$ :: $\overline{AB}^2.tt$; d'où il est visible que $p = t$.

10. DÉFIN. Ainsi, puisque par la génération de l'hyperbole, cette Courbe se trouve décrite sur un Plan, mettons sur ce Plan la grandeur t = GCD (fig. 70.); de manière que tombant perpendiculairement sur le milieu C de l'*Axe transverse* AB, elle soit coupée en deux parties égales par cet Axe, & cette Ligne déterminée & disposée ainsi que nous venons de le faire, est ce que l'on appelle le *second Axe* de l'hyperbole, rélativement à l'*Axe transverse*, qui prend alors le nom de *premier Axe*. Les Géomètres les appellent encore, l'un par rapport à l'autre, *Axes conjugués*. Et, quand le second Axe GCD est prolongé indéfiniment de part ou d'autre, on l'appelle alors *second Axe indéterminé*.

* 11. COR. I. Puisque les hyperboles *opposées* sont égales & semblables (6), en faisant l'Abcisse Ax = BP, si l'on joint les extrêmités M, m, des Ordonnées correspondantes PM, xm, par la Ligne Mm; cette Ligne sera parallèle au premier Axe AB & coupée en deux parties égales par le second GD, prolongé s'il en est besoin.

Car les Abcisses BP, Ax, étant égales (supp.), les Ordonnées PM, xm, perpendiculaires à la même Ligne Px (const.), le feront aussi (6); par conséquent Mm sera parallèle à Px, ou au premier Axe AB; donc $Mm = Px$. Or Px est coupée en deux parties égales par le second Axe GD (const.); donc Mm le sera aussi par ce second Axe, prolongé s'il est nécessaire.

* 12. COR. II. Toute Ligne Mm, menée d'un Point quelconque M d'une hyperbole à son opposée parallèlement

au premier Axe, eſt coupée en deux parties égales par ce ſecond Axe, prolongé ſuivant le beſoin.

Pour s'en convaincre, on abbaiſſera des Points M, *m*, les Ordonnées MP, *mx*, leſquelles ſont égales, à cauſe du Parallèliſme des Lignes M*m*, P*x* (ſupp.); or les Ordonnées étant égales, les Abciſſes BP, A*x*, le ſont auſſi; ainſi C*x* = CP; mais les figures *m*NC*x*, MPCN étant des Parallèlogrammes (conſt.), *m*N = C*x* = CP = NM; donc *m*N = NM.

Mais, ſi M*r* n'étoit pas parallèle au premier Axe, elle ne pourroit pas être coupée en deux parties égales par le ſecond Axe, comme l'eſt M*m*. car cette Ligne M*r* tomberoit de l'un ou de l'autre côté de M*m*. Or, dans l'un & l'autre cas, elle ne peut pas être coupée en deux parties égales par GD; autrement, tirant M*m* parallèle à l'Axe AB, l'on auroit *m*N = NM, comme on vient de le démontrer; donc, ſi M*t* égaloit *tr*, l'on auroit MN. N*m* :: M*t*. *tr*; & par conſéquent, en tirant *mr*, elle ſeroit parallèle à N*t*, ou à GD (n°. 279. *Inſt. T.* 2.); mais *mx* eſt auſſi parallèle à GD (conſt.); donc *mr* ſeroit parallèle à *mx*. Ce qui eſt abſurde; donc, &c.

* 13. COROL. III. C'eſt pourquoi la *converſe* du Corollaire ſecond eſt vraie; c'eſt-à-dire, que toute Ligne, menée d'un Point d'une hyperbole à ſon oppoſée, & coupée en deux parties égales par le ſecond Axe indéterminé, eſt néceſſairement parallèle au premier Axe; puiſque, ſi elle ne l'étoit pas, elle ne pourroit pas être coupée en deux parties égales par le ſecond Axe (12). Ce qui eſt contre la ſuppoſition.

14. REMARQ. Comme les Parallèles au premier Axe ſont coupées en deux parties égales par le ſecond, & que les Parallèles au ſecond ſont coupées en deux parties égales par le premier; c'eſt la raiſon pour laquelle les Géomètres appellent ces Axes, l'un par rapport à l'autre, des *Axes conjugués*; parce qu'ils ſont des fonctions ſemblables. On voit auſſi pourquoi l'on a appellé *ſecond Axe indéterminé* la Perpendiculaire indéfinie ND, élevée ſur le milieu du premier

Axe; parce qu'elle coupe en deux parties égales toutes les Lignes, qui lui ſont perpendiculaires & terminées aux *Hyperboles oppoſées*; & ce qui fait encore que les Lignes, telles que MN, N*m*, ſont des *Ordonnées* au ſecond Axe.

15. PROP. III. Le Rectangle d'une Abciſſe quelconque BP par ſon Axe intercepté AP, eſt au quarré de ſon Ordonnée correſpondante PM, comme le quarré du premier Axe AB eſt au quarré du ſecond GD, ou comme le quarré de la moitié BC du premier, eſt au quarré de la moitié CD du ſecond; ainſi il faut prouver que $BP \times AP. \overline{PM}^2 :: \overline{AB}^2. \overline{GD}^2$, ou :: $\overline{BC}^2. \overline{CD}^2$.

DÉM. Elle eſt évidente par la ſeconde Propoſition (7), où l'on a fait voir que l'on trouvera toujours le même quatriéme terme proportionel *tt* aux trois grandeurs $BP \times AP$, $\overline{PM}^2$, $\overline{AB}^2$; en quelque Point de l'Axe que l'on prenne l'Ordonnée: or le ſecond Axe GD eſt la Racine quarrée de ce quatriéme proportionel (10); c'eſt-à-dire, que GD = *t*, ou $\overline{GD}^2 = tt$; donc $BP \times AP. \overline{PM}^2 :: \overline{AB}^2. \overline{GD}^2$. mais $AB. GD :: BC. CD$, ou $\overline{AB}^2. \overline{GD}^2 :: \overline{BC}^2. \overline{CD}^2$; donc auſſi $BP \times AP. \overline{PM}^2 :: \overline{BC}^2. \overline{CD}^2$. C. Q. F. D.

* 16. REMARQ. Quand la Section du cône ſe fait parallèlement à ſon Axe; c'eſt-à-dire, quand T*t* eſt parallèle à l'Axe OQ (fig. 69.); 1°. Quoique $Cb > CD$, & $Ca > Cb$, cependant les deux *Hyperboles oppoſées*, N*bx*, N*ay*, rencontrent chacune leurs Baſes, à la même diſtance de leur Sommet; c'eſt-à-dire, que *at* = *b*T. 2°. La diſtance de T au centre O, eſt égale au ſecond demi-Axe de ces Hyperboles. 3°. La Ligne *b*K tirée parallèlement au Diamètre DH, eſt égale au ſecond Axe de ces Hyperboles; c'eſt-à-dire que, *b*K = 2 TO.

DÉM. Tirons CV parallèlement à DH, & les Triangles ſemblables COH, *a*VC, donneront CO. OH :: *a*V. VC; & des Triangles ſemblables COD, C*b*V, on tirera CO. OD ou OH :: V*b*. VC. Ainſi *a*V. VC :: V*b*. VC; donc *a*V = V*b*; mais (à cauſe du parallèliſme des Lignes CV, DH,

OQ, Tt, & de CO = CQ) on a Vt = VT, ou aV + at = Vb + bT; donc, puiſque aV = Vb, on aura at = bT. C. Q. F. 1°. D.

2°. Les Triangles ſemblables bTD, bVC, donnent bT. TD :: Vb. VC; & les Triangles ſemblables aTH, aVC, produiſent aT. TH :: aV ou Vb. VC; ainſi, (en multip. par ordre les termes de ces deux proport.) bT × aT. TD × TH ou $\overline{TN}^2$ :: Vb. VC :: $4\overline{Vb}^2$. $4\overline{VC}^2$ :: $\overline{ab}^2$. $4\overline{VC}^2$ (parce que ab égalant 2Vb; $\overline{ab}^2 = 4\overline{Vb}^2$); donc bT × aT. $\overline{TN}^2$ :: $\overline{ab}^2$. $4\overline{VC}^2$. donc (7 & 10) $4\overline{VC}^2$ eſt le quarré du ſecond Axe. 2VC eſt ce ſecond Axe, & VC eſt le ſecond demi-Axe. Or VC = TO; donc TO eſt le ſecond demi-Axe. C. Q. F. 2°. D.

3°. CO. OD :: CG. bG, & CO. OH ou OD :: CG. GK; donc CG. bG :: CG. GK; ainſi bG = GK = VC; donc bG + GK = bK = 2VC = 2TO = le ſecond Axe. C. Q. F. 3°. D.

17. Corol. I. Si l'on fait donc (fig. 70.) AB = 2a; CA = CB = a; GD = 2b; CG = CD = b; PM = y; GP = x; BP = CP − CB = x − a; AP = CP + CA = x + a; ainſi BP × AP = x − a × x + a = $xx - aa$; la proport. BP × AP. $\overline{PM}^2$ :: $\overline{BC}^2$. $\overline{CD}^2$ du n°. 15. exprimée analytiquement, deviendra $xx - aa$. yy :: aa. bb; d'où l'on tire $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, qui eſt l'équation de l'Hyperbole par rapport à ſes Axes.

* 18. Remarq. I. On appelle Hyperbole *équilatère*, celle dont les Axes ſont égaux; c'eſt-à-dire, celle où a = b; par conſéquent l'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ d'une Hyperbole quelconque, deviendra pour l'Hyperbole *équilatère*, $xx - aa = yy$. Ce qui ſignifie que dans l'Hyperbole *équilatère*, le quarré de l'Ordonnée y eſt égal au Rectangle de l'Axe intercepté x + a par l'Abciſſe x − a.

* 19. REMARQ. II. Mais comment trouver dans le cône l'Hyperbole *équilatère* ? On n'a qu'à ſuppoſer que le cône CDH (fig. 69.) eſt Rectangle en C, ou que l'Angle DCH de ſon Sommet eſt droit, & l'Hyperbole N*bx* deviendra *équilatère*. On ſuppoſe toujours T*t* parallèle à l'Axe OQ du cône.

DÉM. L'Angle DCH étant droit, *b*C*a* le ſera auſſi ; par conſéquent, ſi du milieu V de l'Axe tranſverſe *ab*, on décrit un Cercle avec le rayon V*a* ou V*b*, la circonférence paſſera néceſſairement par le Point C ; ainſi, dans ce cas, VC ſera un rayon de ce Cercle ; donc V*a* = VC, ou 2V*a* = 2VC = 2TO ; mais 2V*a* = le premier Axe *ab*, & 2TO = le ſecond Axe *b*K (Art. 3. du n°. 16.) ; par conſéquent le premier Axe = le ſecond Axe. Donc, quand le cône eſt *Rectangle*, & que la Section s'en fait *parallèlement* à l'Axe de ce cône, il en naît une *Hyperbole équilatère*.

* 20. REMARQ. III. Quand l'Angle DCH au Sommet du cône eſt *obtus*, & que la Section T*t* eſt parallèle à l'Axe de ce ſolide ; alors le ſecond Axe 2VC > que le premier Axe 2*a*V ; mais, lorſque l'Angle DCH eſt *aigu* ; le premier Axe 2*a*V > que le ſecond Axe 2VC.

DÉM. 1°. L'Angle DCH étant *obtus*, l'Angle *b*C*a* ſera aigu ; ainſi, en décrivant un Cercle du Point V ſur le premier Axe *ab* = 2*a*V, la circonférence de ce Cercle coupera VC en deçà de C, par rapport au Point V ; donc VC > *a*V, ou 2VC > 2*a*V ; c'eſt-à-dire, que le ſecond Axe eſt plus grand que le premier.

2°. L'Angle DCH étant *aigu*, l'Angle *b*C*a* ſera obtus ; ainſi la circonférence d'un pareil Cercle que ci-deſſus paſſera au-delà de C ; & par conſéquent *a*V > VC, ou 2*a*V > 2VC ; ce qui ſignifie que, dans ce dernier cas, le premier Axe eſt plus grand que le ſecond.

Lors donc qu'il s'agit d'une pareille Section de cône, on peut toujours ſçavoir, par la nature de l'Angle au Sommet du cône, ſi les Axes ſont égaux ou inégaux ; & quand ils ſont inégaux, lequel des deux eſt le plus grand.

21. COROL. II. Puiſque (17) $xx - aa = \frac{ayy}{bb}$, (fig. 70), on aura $xx = \frac{ayy}{bb} + aa = \frac{ayy + aabb}{bb}$, qui eſt l'expreſſion du quarré xx de l'indéterminée CP du premier Axe, ou de l'*Ordonnée* MN au ſecond.

REM. *J'avertis une fois pour toutes, que l'on doit faire une ſuffiſante attention à cette expreſſion du quarré de l'indéterminée* CP *du premier Axe, ainſi qu'à celles qui vont ſuivre; parce qu'elles nous ſeront très-commodes dans la ſuite, pour découvrir les autres propriétés de l'Hyperbole.*

22. COROL. III. Ayant donc $xx = \frac{ayy + aabb}{bb}$, on aura $xx \times bb = \overline{yy + bb} \times aa$, d'où l'on tire $xx.yy + bb :: aa.bb$, ou $:: 4aa.4bb$; c'eſt-à-dire qu'en menant au ſecond Axe l'Ordonnée MN = CP = x, & conſidérant que l'Abciſſe CN de ce ſecond Axe = PM = y, on verra que le quarré xx ($\overline{MN}^2$) d'une Ordonnée quelconque MN au ſecond Axe, eſt à la ſomme des quarrés $yy + bb$ ($\overline{CN}^2 + \overline{CD}^2$) de l'Abciſſe correſpondante CN & de la moitié CD du ſecond Axe, comme le quarré aa de la moitié du premier Axe eſt au quarré bb de la moitié du ſecond, ou comme le quarré $4aa$ du premier Axe eſt au quarré $4bb$ du ſecond [a].

23. COR. IV. Suppoſant toujours l'équation $xx - aa =$

[a] Les Points de l'Hyperbole, rapportés au ſecond Axe, ne donnent pas la même équation qu'étant rapportés au premier, ainſi qu'il arrive dans l'Ellipſe; c'eſt qu'à proprement parler, la Ligne GD (fig. 70.) n'eſt point un Axe des Hyperboles oppoſées, MBK, *m*AL. Si GD coupe en deux parties égales toutes les Lignes *Mm*, menées parallèlement à AB, cela n'arrive que parce que l'on conſidére en même-tems deux Hyperboles oppoſées; ce qui eſt purement accidentel; les propriétés d'une Hyperbole pouvant être abſolument découvertes ſans ſon oppoſée; auſſi cette Courbe peut être engendrée dans le Cône, & ſa propriété caractériſtique s'y découvre indépendamment de ſa compagne, comme on l'a vû n°. 4. en ſupprimant le Cône oppoſé, ou en n'y faiſant pas attention.

$\frac{aayy}{bb}$, l'on aura (en multipliant par bb) $bbxx - aabb = aayy$; ainſi (en diviſant par aa) $yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$, qui eſt l'expreſſion du quarré de l'Ordonnée au premier Axe, ou de l'Abciſſe du ſecond.

24. Corol. V. Prenant encore l'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$; & tranſpoſant aa, ainſi que $\frac{aayy}{bb}$, on a $xx - \frac{aayy}{bb} = aa$ pour l'expreſſion du quarré aa de la moitié du premier Axe.

25. Cor. VI. Nous en tenant toujours à l'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, on aura (en multipliant par bb) $bbxx - aabb = aayy$; donc (en tranſpoſant) $bbxx - aayy = aabb$; ainſi (en diviſant par aa) $bb = \frac{bbxx}{aa} - yy$, qui eſt l'expreſſion de la moitié du ſecond Axe.

26. Corol. VII. De ce que $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, il eſt viſible que les x, c'eſt-à-dire les CP, ou, ſi l'on veut, les Abciſſes augmentans [a] les y ou les Ordonnées augmentent auſſi. Car x augmentant, xx augmentera; ainſi $xx - aa$ ſera plus grand qu'auparavant; donc $\frac{aayy}{bb}$, qui lui eſt égal, ſera auſſi plus grand; mais il ne ſera pas plus grand par les quantités aa, bb, qui ſont des grandeurs conſtantes; ce ſera donc par yy; ainſi yy augmentant, y augmentera; par conſéquent les Ordonnées croiſſent, quand les Abciſſes augmentent. Ce qui nous montre que l'*Hyperbole* s'éloigne toujours de plus en plus de ſon Axe, & qu'elle ne le coupe qu'au ſeul Point B.

[a] Parce que les CP ne ſçauroient croître, ſans l'augmentation des Abciſſes BP.

§ 27. Cor. VIII. D'où l'on déduira 1°. comme dans les n°. 11, 12, 13, de la Parabole, qu'une Parallèle GQ. (fig. 70.) au premier Axe AB d'une Hyperbole, rencontrera néceſſairement cette Courbe en un ſeul Point Q. 2°. Qu'une corde quelconque QM prolongée, s'il en eſt beſoin, rencontrera néceſſairement, ou eſt déterminée à rencontrer le premier Axe AB. 3°. Qu'une Tangente en un Point quelconque de cette Courbe, excepté ſon Sommet, ira auſſi rencontrer le premier Axe; & qu'ainſi une *Tangente*, une *Ordonnée* au Point de contingence, & la portion de l'Axe compriſe entre la rencontre de la Tangente & l'Ordonnée, formeront toujours un Triangle-Rectangle, d'où l'on pourra, ſi l'on veut, trouver l'expreſſion de la *ſous-Tangente* de l'Hyperbole, & par conſéquent de ſa *Tangente*; en ſe ſervant de la méthode générale de tirer la Tangente des Courbes, que j'ai donnée au n°. 18, & 19 de la Parabole; ainſi que je le ferai voir plus bas.

* 28. Cor. IX. Il eſt très-facile avec l'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, de déterminer le ſecond Axe d'une Hyperbole donnée, dont on a le premier. Pour cela il n'y a qu'à ſçavoir, qu'elle doit être la valeur de l'indéterminée du premier Axe, correſpondante à l'Ordonnée égale au ſecond. C'eſt pourquoi de l'extrémité G de ce ſecond Axe abbaiſſant la Perpendiculaire GQ, qui rencontrera néceſſairement l'Hyperbole en un Point Q (27), & tirant au premier Axe l'Ordonnée QS, cette Ordonnée ſera égale à $CG = \frac{2}{2} = b$, moitié du ſecond Axe; & l'on aura $QS^2 = yy = bb$; par conſéquent, en mettant dans l'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, la grandeur bb en la place de yy, elle deviendra $xx - aa = \frac{aabb}{bb} = aa$, ou, en tranſpoſant, $xx = 2aa$. Par où l'on voit que, quand l'Ordonnée eſt égale au ſecond Axe, l'indéterminée x correſpondante à cette Ordonnée,

eſt l'hypothénuſe d'un Triangle iſoſcéle Rectangle, dont chacun des côtés eſt égal à la moitié du premier Axe.

Ceci bien entendu, pour avoir le ſecond Axe déterminé, quand le premier eſt donné avec la Courbe; ſur le milieu C du premier on élèvera une Perpendiculaire indéfinie GV; on prendra ſur cette Perpendiculaire la partie CT = CB, moitié du premier Axe, prenant enſuite BT, hypothénuſe de ce Triangle-Rectangle, on la portera de C en S ſur le premier Axe, d'où tirant l'Ordonnée SQ, cette Ordonnée ſera égale à la moitié du ſecond Axe.

DÉM. Puiſque $\overline{BT}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CT}^2 = aa + aa = 2aa$, & que CS = BT (conſt.), on aura $\overline{CS}^2$ ou $xx = 2aa$. Maintenant, quelque puiſſe être le ſecond demi-Axe z de l'Hyperbole propoſée, l'on aura (17) $xx - aa : yy$ ou $\overline{SQ}^2 :: aa . zz$ quarré de la moitié du ſecond Axe. Ainſi, en mettant, dans cette proportion, $2aa$ en la place de xx, elle deviendra $2aa - aa$, ou $aa . \overline{SQ}^2 :: aa . zz$. Donc $\overline{SQ}^2 = zz$, ou SQ = z; c'eſt-à-dire, que par cette conſtruction, l'Ordonnée SQ = la moitié du ſecond Axe. C. Q. F. D.

29. COR. X. Portons l'hypothénuſe BD du centre C, aux Points F, f, du premier Axe indéterminé des Hyperboles oppoſées; & d'un Point quelconque M de ces Hyperboles tirons les Lignes MF, Mf, aux Points F, f; enfin menons l'Ordonnée MP à l'Axe, & il arrivera toujours que Mf égale une quatriéme proportionelle aux trois grandeurs CB, Cf, CP, en y ajoutant le demi-Axe CB; & que MF ſera toujours égale à la même quatriéme proportionelle, dont on ôtera le demi-Axe CB; c'eſt-à-dire, que

$$Mf = \frac{Cf \times CP}{CB} + CB, \text{ \& } MF = \frac{Cf \times CP}{CB} - CB.$$

DÉM. Suppoſant les mêmes dénominations que ci-deſſus; & faiſant de plus BD = Cf = CF = c; d'où l'on a $cc = aa + bb$; FP = CP − CF = x − c; donc $\overline{FP}^2 = xx - 2cx + cc$; & fP = CP + Cf = x + c;

donc $\overline{fP}^2 = xx + 2cx + cc$. Cela supposé, il s'agit de prouver que $Mf = \frac{cx}{a} + a = \frac{cx + aa}{a}$, & que MF $= \frac{cx}{a} - a = \frac{cx - aa}{a}$

1°. Le Triangle-Rectangle fPM nous donne $\overline{fP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{Mf}^2 = xx + 2cx + cc + yy$ (D); par conséquent, en mettant, dans l'équation D, la quantité $aa + bb$ pour cc, & au lieu de yy l'expression $\frac{bbxx - aabb}{aa}$ (23), on aura $\overline{Mf}^2 = xx + 2cx + aa + bb + \frac{bbxx - aabb}{aa}$; donc (en réduisant à la même dénomination) $\overline{Mf}^2 = \frac{a^2x^2 + 2a^2cx + a^4 + a^2b^2 + b^2x^2 - a^2b^2}{aa} = \frac{a^2x^2 + 2a^2cx + a^4 + b^2x^2}{aa}$ (M). Or $a^2x^2 + b^2x^2 = \overline{a^2 + b^2} \times x^2 = c^2x^2$; par conséq. en mettant dans l'équation M, la grandeur c^2x^2 en la place de $a^2x^2 + b^2x^2$, elle deviendra $\overline{Mf}^2 = \frac{c^2x^2 + 2a^2cx + a^4}{aa}$; donc (en tirant la Racine quarrée) $Mf = \frac{cx + aa}{a} = \frac{cx}{a} + a$. C. Q. F. 1°. D.

2°. Moyennant le Triangle-Rectangle FPM, nous aurons $\overline{MF}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{PM}^2 = cc - 2cx + xx + yy$; &, en faisant précisément les mêmes substitutions que dans l'équation de l'art. 1. nous arriverons à cette équation, $\overline{MF}$

$= \frac{c^2x^2 - 2a^2cx + a^4}{aa}$; donc, (en extrayant la Racine quarrée) $MF = \frac{cx - aa}{a} = \frac{cx}{a} - a$. C. Q. F. 2°. D. & ce que l'on doit bien remarquer.

30. Corol. II. Puisque $Mf = \frac{cx + aa}{a}$, & $MF = \frac{cx - aa}{a}$, on aura $Mf + MF = \frac{2cx}{a}$; donc $\overline{Mf + MF} \times a = 2c \times x$; par conséquent $\overline{Mf + MF}.\ x :: 2c.\ a$; c'est-à-dire, que la somme des Lignes menées d'un Point quelconque M de l'Hyperbole aux Points f, F, est toujours dans un rapport constant avec l'indéterminée CP correspondante au Point M; cette somme étant toujours à $CP = x$, comme $2c$ est à a, lesquelles sont des grandeurs constantes.

31. Corol. XII. Si, au lieu de prendre la somme des valeurs des Lignes Mf, MF, trouvées au n°. 29, on retranche au contraire la plus petite de la plus grande, on aura $Mf - MF = \frac{2aa}{a} = 2a = AB$; c'est-à-dire que la différence des Lignes Mf, MF, en quelque Point de la Courbe qu'on les prenne, sera toujours égale au premier Axe. Ce qu'il faut encore bien remarquer.

32. Cor. XIII. Le Rectangle $AF \times BF = \overline{CD}^2$ quarré de la moitié du second Axe. Car $AF = CF + CA = c + a$, & $BF = CF - CB = c - a$; donc $AF \times BF = \overline{c + a} \times \overline{c - a} = cc - aa$ (S) : or, (à cause du Triangle-Rectangle BCD, & de $BD = CF = c$) on a $cc = aa + bb$. Ainsi, en mettant la valeur de cc dans l'équation S, on aura $AF \times BF = aa + bb - aa = bb = \overline{CD}^2$; donc $AF \times BF = \overline{CD}^2$.

33. Déf. Si l'on cherche une troisiéme proportionelle

au premier & au ſecond Axe, il vient une Ligne à laquelle on a donné le nom de *Paramètre* du premier Axe; ce ſeroit au contraire le *Paramètre* du ſecond, ſi ce ſecond occupoit le premier terme de la proportion. Faiſant donc $2a$ (AB). $2b$ (GD) :: $2b$ (GD). $p = \frac{4bb}{2a}$ ou $\frac{2bb}{a}$; cette grandeur p ou $\frac{2bb}{a}$ déſignera, dans la ſuite, le *Paramètre* du premier Axe. Par où l'on voit que l'un des Axes eſt toujours une moyenne proportionelle entre l'autre Axe & ſon Paramètre.

34. Cor. XIV. L'Ordonnée FK à l'un des Points F, f, eſt égale à la moitié p du *Paramètre* du premier Axe; c'eſt-à-dire que $FK = \frac{p}{2}$ ou $\frac{bb}{a}$.

Dém. Nous ſçavons (15) que $\overline{FK}^2 . AF \times BF :: \overline{CD}^2 . \overline{CB}^2$, ou :: $bb . aa$. Mais $AF \times BF = \overline{CD}^2$ ou bb (32). Donc $\overline{FK}^2 . bb :: bb . aa$, ou $FK . b :: b . a$; donc $FK = \frac{bb}{a}$ ou $\frac{p}{2}$. C. Q. F. D.

* 35. Cor. XV. La diſtance BF de l'un des Points F au Sommet B le plus proche, eſt plus petite que le quart du Paramètre p; c'eſt-à-dire, que $BF < \frac{p}{4}$.

Dém. $BF = CF - CB = c - a$, &c, puiſque $p = \frac{2bb}{a}$ (33), on aura $\frac{p}{4} = \frac{bb}{2a}$. D'ailleurs $cc = bb + aa$; donc $bb = cc - aa$. Par conſéquent $BF . \frac{p}{4} :: c - a . \frac{bb}{2a} :: c - a . \frac{cc - aa}{2a}$ (à cauſe de $bb = cc - aa$) :: $c - a \times 2a . cc - aa$ :: (en diviſant ces deux derniers termes par $c + a$) $2a . c + a$, ou :: $AB . AF$; donc $BF . \frac{p}{4} :: AB . AF$: mais $AB < AF$. Par conſéquent auſſi $BF < \frac{p}{4}$. C. Q. F. D.

36. Remarq. Nous démontrerons au n°. 95, que les

Points F, f, déterminés comme nous l'avons fait au n°. 29, ſont de véritables *Foyers*; & que par conſéquent 1°. la double Ordonnée au Foyer F d'une Hyperbole, eſt égale au Paramètre de ſon premier Axe (34). 2°. Que la diſtance du Foyer F d'une Hyperbole à ſon Sommet, eſt plus petite que le quart du Paramètre de ſon premier Axe (35.)

37. COROL. XV. Puiſque $2a.\ 2b :: 2b.\ p$ (33); donc $4aa.\ 4bb :: 2a.\ p$ (256. *Inſt. T.* 2.), ou $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$; ainſi, en ſubſtituant dans l'équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ de l'Hyperbole (trouvée n°. 17.), l'expreſſion $\frac{2a}{p}$ au lieu de $\frac{aa}{bb}$, elle deviendra $xx - aa = \frac{2ayy}{p}$, qui eſt une autre équation de l'Hyperbole par rapport à ſon Paramètre.

* 38. COR. XVI. Le quarré $\overline{PM}$ d'une Ordonnée quelconque PM au premier Axe prolongé de l'Hyperbole, eſt plus grand que le Rectangle de l'Abciſſe BP par le Paramètre p du même Axe.

DÉM. On ſçait que $p = \frac{2bb}{a}$ (33); $BP = CP - CB = x - a$; donc $BP \times p = \overline{x - a} \times \frac{2bb}{a}$; $PM = y$, ainſi $\overline{PM} = yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$ (23) $= \overline{\frac{xx - aa}{a}} \times \frac{bb}{a}$: il faut donc démontrer que $\overline{PM} > BP \times p$, ou que $\overline{\frac{xx - aa}{a}} \times \frac{bb}{a} > \overline{x - a} \times \frac{2bb}{a}$. Or $\overline{\frac{xx - aa}{a}} \times \frac{bb}{a}$ $\overline{x - a} \times \frac{2bb}{a}$ :: (en diviſant par $\frac{bb}{a}$) $\frac{xx - aa}{a}$. $\overline{x - a}$ $\times$

$\times 2$. :: (en diviſant par $x - a$) $\frac{x+a}{a}$. 2 :: (en multipliant par a) $x + a$. $2a$ :: AP. AB; donc $\frac{\overline{xx - aa}}{a} \times \frac{bb}{a}$. $\overline{x - a} \times \frac{2bb}{a}$, ou $\overline{PM}^2$. BP $\times p$ :: AP. AB. Mais AP $>$ AB; donc $\overline{PM}^2 >$ BP $\times p$. C. Q. F. D.

39. Remarq. C'eſt cet excès du quarré de l'Ordonnée ſur le Rectangle de l'Abciſſe par le Paramètre, qui a fait donner le nom d'*Hyperbole* à cette eſpèce de Section conique, du mot Grec ὑπερβολὴ *ſuperlatio* excès.

* Cor. XVII. Cherchons préſentement le *Paramètre* du ſecond Axe, en faiſant $2b$. $2a$ :: $2a$ eſt à un quatrième terme $= \frac{2aa}{b}$ que j'appelle m; & je dis encore que le quarré d'une Ordonnée quelconque MN au ſecond Axe, prolongé s'il eſt néceſſaire, eſt plus grand que le Rectangle de l'Abciſſe CN correſpondante, par le Paramètre m du ſecond Axe; pourvu que CN ſoit plus grande ou plus petite que la moitié de ce ſecond Axe.

Dém. Soit donc MN $=$ CP $= x$; CN $=$ MP $= y$; on vient de voir que $m = \frac{2aa}{b}$, & (21) $xx = \frac{aayy + aabb}{bb}$ $= \overline{bb + yy} \times \frac{aa}{bb} = \overline{MN}^2$. Il s'agit donc de prouver que $\overline{MN}^2 > m \times$ CN, ou que $\overline{bb + yy} \times \frac{aa}{bb} > \frac{2aay}{b}$.

Or $\overline{bb + yy} \times \frac{aa}{bb}$. $\frac{2aay}{b}$ :: (en diviſ. par $\frac{aa}{b}$) $\frac{bb + yy}{b}$. $2y$ :: (en multipliant par b) $bb + yy$. $2by$. Or $bb + yy >$

$2by$ [a] ; donc $\overline{bb+yy} \times \frac{aa}{bb} > \frac{2aay}{b}$, c'est-à-dire $\overline{MN}^2 > m \times CN$. C. Q. F. D.

* 41. REMARQ. J'ai ajouté, pour la vérité de ce Corollaire, que l'Abciſſe $CN = y$ devoit être plus grande ou plus petite que la moitié b du ſecond Axe. Car, ſi y égaloit b, on auroit $bb + yy = 2bb$, & $2by = 2bb$; ainſi $bb + yy$ égaleroit $2by$; & par conſéquent $\overline{MN}^2 = m \times CN$. par où l'on voit que le Corollaire précédent eſt ſujet à cette exception.

42. PROP. IV. Par le Sommet B de l'Hyperbole (fig. 71.) menant HBT parallèle & égale au ſecond Axe GD ; de manière que $BH = BT = CG = CD = b$; & du centre C, tirant par les extrêmités H, T, les droites indéfinies CN, CR ; ſi l'on mène après cela, par un Point quelconque P de l'Axe prolongé, la droite LK parallèle à HT, ou au ſecond Axe GD, on aura toujours 1°. $LM \times MK = \overline{BH}^2 = bb$.

2°. En prolongeant les Lignes CN, CR, indéfiniment de l'autre côté de C, & tirant du Point M ou F, où LK rencontre l'Hyperbobe, la Ligne $M\ell$ parallèlement au premier Axe, il arrivera toujours que $M\ell \times M\ell = \overline{CB}^2 = aa$.

DÉM. *de la première partie.* Suppoſant aux mêmes Lignes les mêmes dénominations que ci-deſſus ; l'on aura, (à cauſe des Triang. ſembl. CBH, CPL) a (CB). b (BH) :: x (CP).

---

[a] C'eſt-à-dire que la ſomme des quarrés bb, yy, de deux grandeurs inégales b, y, eſt toujours plus grande que le double du produit by de ces grandeurs. Soit $y > b$, & d leur différence ; on aura $y - b = d$; donc (en quarrant) $yy - 2by + bb = dd$; ainſi $yy + bb = 2by + dd$, & par conſéquent $yy + bb > 2by$.

$\frac{bx}{a} = PL = PK$; ainſi $LM = PL - PM = \frac{bx}{a} - y$, & $MK = PK + PM = \frac{bx}{a} + y$; donc $LM \times MK = \frac{bx}{a} - y \times \frac{bx}{a} + y = \frac{b^2x^2}{aa} - yy = bb$ (25); par conſéquent $LM \times MK = bb$ ou $\overline{BH}^2$ ou $\overline{GC}^2$. C. Q. F. 1°. D.

Dém. *de la ſeconde partie.* Les Triang. ſemblables CPK, kMK, donnent $\frac{bx}{a}$ (PK). x (CP) :: $\frac{bx}{a} + y$ (MK). $Mk = x + \frac{ay}{b}$. Ce que l'on trouvera en diviſant le produit des Moyens x, $\frac{bx}{a} + y$, par le premier terme $\frac{bx}{a}$.

Pareillement des Triangles ſemblables lML, LPC, on tire $\frac{bx}{a}$ (PL). x (CP) :: $\frac{bx}{a} - y$ (LM). $x - \frac{ay}{b} = Ml$; (ce que l'on trouvera en multipliant les Moyens x, $\frac{bx}{a} - y$; & diviſant leur produit par le premier terme $\frac{bx}{a}$). Par conſéquent $Mk \times Ml = x + \frac{ay}{b} \times x - \frac{ay}{b} = xx - \frac{aayy}{bb} = aa$ (24). Donc $Mk \times Ml = aa$ ou $\overline{CB}^2$. C. Q. F. 2°. D.

43. Réciproquement, ſi une Ligne quelconque LMK, terminée par les côtés d'un Triangle iſoſcèle LCK, eſt diviſée au Point M, de manière que le produit $LM \times MK$ de ſes deux parties, ſoit égal au quarré $\overline{BH}^2$ de la moitié d'une autre Ligne HT, terminée par les côtés du même

Angle & parallèle à LMK ; je dis que le Point M eſt à une Hyperbole, ou que la Courbe, qui diviſe ainſi toutes les indéterminées LMK, eſt une Hyperbole.

DÉM. Du Sommet de l'Angle C tirons, par le milieu de HT parallèle à LK, l'indéfinie CQ ; laquelle diviſera auſſi LK par le milieu P ; faiſons le prolongement CA = CB ; la Perpendiculaire CG = CD = HB = BT ; &, conſervant les mêmes dénominations que ci-deſſus, nous aurons a (CB). b (BH) :: x (CP). $\frac{bx}{a}$ = PL ou PK. Donc LM = PL — PM = $\frac{bx}{a} - y$, & MK = PK + PM = $\frac{bx}{a} + y$. Donc LM × MK = $\frac{b^2x^2}{aa} - yy$. Or (ſupp.) LM × MK = $\overline{BH}^2 = bb$. Donc $bb = \frac{b^2x^2}{aa} - yy$. Ainſi (en multipliant par aa) $a^2b^2 = b^2x^2 - aayy$; donc (en tranſpoſant) $aayy = bbxx - aabb = xx - aa \times bb$; par conſéquent yy ($\overline{PM}^2$). $xx - aa$ ou $x - a \times x + a$ (BP × AP) :: bb ($\overline{BH}^2$). aa ($\overline{CB}^2$), qui eſt la propriété caractériſtique de l'Hyperbole, que l'on a trouvée au n°. 15. le Point M eſt donc à une Hyperbole.

44. COROL. I. Le point P ayant été pris à volonté ſur le prolongement du premier Axe, il s'enſuit que tous les Rectangles, comme LM × MK, ſont égaux entr'eux ; puiſqu'ils ſont toujours égaux au même quarré $\overline{BH}^2 = bb$; c'eſt-à-dire qu'en tirant par un autre Point Q du premier Axe prolongé une parallèle IV à LK, l'on aura VE × EI = LM × MK, ou MK. EI :: VE. LM.

45. COR. II. On verra donc que VE eſt plus petite que LM ; puiſqu'en tirant MS, parallélement au premier Axe BQ, il eſt évident que MK < aI ; or aI < EI ; donc MK < EI ; mais (44) MK. EI :: VE. LM ; ainſi MK étant < EI, il faut que VE ſoit auſſi < LM.

46. COROL. III. Par conſéquent, en abbaiſſant des Points E, M, les Perpendiculaires E*t*, M*r*, ſur le côté CN, la Perpendiculaire E*t* ſera plus petite que M*r*. Car les Triangles ſemblables VE*t*, LM*r*, donnent VE. LM :: E*t*. M*r*. Or VE $<$ LM (45) donc E*t* $<$ M*r*.

47. COROL. IV. Ainſi, à meſure que la branche Hyperbolique BME s'éloigne du Sommet B, elle s'approche continuellement du côté CN. Cependant cette branche de l'Hyperbole & le côté CN, prolongés à l'infini, ne ſe rencontreront jamais. Car, ſi ces Lignes ſe rencontroient, on auroit alors PM $=$ PL, ou $\overline{\text{PM}}^2 = \overline{\text{PL}}^2$; c'eſt-à-dire que $yy = \frac{bbxx}{aa}$; puiſque PL $= \frac{bx}{a}$ (par la Démonſtration du n°. 42.) : mais cela ne peut pas être, vû que (23) $yy = \frac{bbxx}{aa} - \frac{aabb}{aa}$, laquelle eſt une grandeur plus petite que $\frac{bbxx}{aa}$.

C'eſt pourquoi les Anciens ont appellé *Aſymptotes* les Lignes indéfinies CN, CR; mot qui eſt compoſé de trois mots Grecs α privatif, $\sigma\upsilon\nu$ avec, & $\pi\tau\omega\tau\omega$ je tombe; c'eſt-à-dire *incoincident* ou qui ne tombent point avec [*a*]. Les *Aſymptotes* de l'Hyperbole ſont donc des Lignes droites, qui s'approchent continuellement de cette Courbe, ſans pouvoir la rencontrer; & par conſéquent cette Courbe eſt entièrement renfermée dans l'Angle NCR des *Aſymptotes*.

* 48. REMARQ. Comme les Lignes CN, CR (fig. 71.) (tirées du centre de l'Hyperbole MBF par les extrêmités de la Perpendiculaire HBT au Sommet, égale au ſecond Axe GCD & telle que BH $=$ BT) ſont des *Aſymptotes* (47); pour trouver de pareilles Lignes dans le Cône, on ſe ſervira

[*a*] Les Grecs donnoient toujours à certaines Lignes principales, des noms qui en exprimoient quelque propriété; enſorte que le Peuple, comme les Sçavans, entendoit ce que l'on vouloit dire en prononçant le mot *Aſymptote*.

d'un Cône droit DCH, (fig. 72.), c'eſt-à-dire d'un Cône, dont l'Axe OC ſoit Perpendiculaire ſur ſa Baſe DH, & l'on fera que la Section AT de ce Cône ſoit parallèle à l'Axe OC; ce qui donnera l'Hyperbole NB*x*. Après quoi, ſi l'on tire du Sommet B de cette Hyperbole, une Ligne BK dans le Plan du Triangle par l'Axe, parallèlement à la Baſe DH, & que du Point G, où cette Ligne coupe l'Axe OC, on décrive ſur l'Axe OC & dans le Plan du Triangle par l'Axe, une Hyperbole *n*G*y* égale & ſemblable à l'Hyperbole NB*x* [*a*]; de manière que le Point G ſoit le Sommet de la nouvelle Courbe, on verra que les côtés CD, CH, du Cône propoſé ſont les *Aſymptotes* de l'Hyperbole *n*G*y*, ou de NB*x* tranſportée en G dans le Plan du Triangle par l'Axe.

DÉM. 1°. BK eſt le ſecond Axe de l'une ou l'autre Hyperbole (art. 3. du n°. 16.); 2°. (conſt.) BK eſt Perpendiculaire ſur l'Axe OC, au Sommet G de l'Hyperbole *n*G*y*; elle y eſt auſſi évidemment diviſée en deux parties égales; d'ailleurs le Point C eſt le centre de l'Hyperbole *n*G*y*; comme cela eſt clair, en abbaiſſant CV perpendiculairement ſur le premier Axe AB de l'Hyperbole NB*x*. Par conſéquent les côtés CD, CH, de la fig. 72. ſont par rapport à l'Hyperbole *n*G*y*, préciſément dans le même cas que les Lignes CN, CR, de la fig. 71. par rapport à l'Hyperbole MBF. Or les Lignes CN, CR, ſont *Aſymptotes* de l'Hyperbole MBF (ſupp.); donc auſſi les côtés CD, CH, ſont *Aſymptotes* de l'Hyperbole *n*G*y*, ou de ſon égale NB*x* tranſportée en G dans le Plan du Triangle par l'Axe. C. Q. F. T. & D.

* 49. COROL. V. Si l'on tire (fig. 71.) par le centre C, & dans l'Angle des *Aſymptotes* NCR, ou dans ſon oppoſé au Sommet, une Ligne quelconque *de*; elle coupera néceſſairement l'Hyperbole MBF ou ſon oppoſée en quelque

[*a*] L'Hyperbole *n*G*y* ſera égale & ſemblable à l'Hyperbole NB*x*, ſi l'on fait que les Ordonnées ſur GO, à une certaine diſtance du Sommet G, ſoient égales aux Ordonnées ſur BT à une même diſtance du Sommet B. Ce qui ne peut pas être plus évident.

Point F ou *f*; & entrera au-dedans de cette Courbe, ſans la couper une ſeconde fois. Car l'Hyperbole s'approchant ſans ceſſe de l'*Aſymptote* CR, & la Ligne *ed* s'en écartant toujours depuis le Point C, il faut bien que ces deux Lignes ſe coupent en quelque Point F, & non en davantage; puiſqu'après s'être rencontrées, l'une va d'un côté & l'autre d'un autre.

50. Déf. On appelle *premier Diamètre* toute Ligne FC*f*, laquelle paſſant par le centre rencontre les Hyperboles oppoſées; parce qu'elle coupe en deux parties égales, toutes les Lignes qui lui ſont Ordonnées parallèlement à la Tangente au Point F ou *f*, où cette Ligne coupe les Hyperboles; ainſi que nous le verrons plus bas.

* 51. Cor. VI. Par conſéquent, ſi l'on prend arbitrairement & à égale diſtance du centre, deux Points P, *p*, ſur l'Axe prolongé des Hyperboles oppoſées; que l'on méne l'Ordonnée PF à l'Axe; & que du Point F l'on tire par le centre C l'indéfinie FC*e*, il arrivera que cette Ligne rencontrera l'Hyperbole oppoſée au Point *f*, qui eſt l'extrémité de ſon Ordonnée *pf* au Point *p*.

Dém. 1°. Elle rencontrera l'Hyperbole oppoſée (49). 2°. Les Abciſſes CP, C*p*, étant égales (conſt.), l'Ordonnée au Point *p* eſt égale à l'Ordonnée PF; puiſque les Hyperboles oppoſées ſont égales & ſemblables: mais, comme les Triangles ſemblables CPF, C*pf*, donnent CP. C*p* :: PF. *pf*, & que CP = C*p*; il s'enſuit que PF = *pf*: or PF = l'Ordonnée en *p*; donc *pf* eſt auſſi égale à cette même Ordonnée; c'eſt-à-dire, qu'elle eſt elle même cette Ordonnée. Donc le Point *f*, où la Ligne FC*e* rencontre l'Ordonnée au Point *p*, eſt l'extrêmité de cette Ordonnée.

* 52. Cor. VII. Donc tout premier Diamètre FC*f* eſt coupé en deux parties égales par le centre; puiſque, dans les Triangles-Rectangles, CPF, C*pf*, ayant CP = C*p*, & PF = *pf* (51), il faut néceſſairement que les Hypothénuſes CF, C*f*, ſoient auſſi égales.

* 53. Cor. VIII. De plus, ſi par un Point quelconque *m* de l'une des *Aſymptotes* CN, l'on tire une Parallèle *mg*

à l'autre *Aſymptote* CR; cette Parallèle coupera l'Hyperbole en un ſeul Point F; puiſque cette Parallèle ſe tiendra toujours à une diſtance déterminée de l'*Aſymptote* pendant tout ſon cours, & qu'au contraire l'Hyperbole s'en approche plus près que d'une grandeur donnée quelconque.

54. PROP. V. Par un Point quelconque M de l'Hyperbole MBF, (fig. 73.) menons parallèlement à l'Aſymptote CR, une Ligne MI terminée en un Point I de l'autre Aſymptote CL; & par le même Point M, une autre Parallèle M*f* à l'Aſymptote CL; ſi nous tirons de plus par le Sommet B les Hypothénuſes égales BG, BD, rencontrans les Aſymptotes en O, *n*; je dis que le Rectangle IM × MF = BO × OC.

DÉM. Remarquez d'abord que BG eſt parallèle à l'Aſymptote CR; puiſque BT étant égale & parallèle à GC, (conſt.), les Lignes BG, CT, qui les terminent, ſont égales & parallèles; & par la même raiſon BD eſt Parallèle à CL; ainſi GC. CD :: GO. OB. Or GC = CD (ſupp.); donc GO = OB. De plus GB. BD :: GO. OC : mais GB = BD (conſt.); donc GO = OC. On prouvera de même que D*n* = B*n* = *n*C. Ainſi les Lignes GO, OB, OC, D*n*, B*n*, *n*C, ſont toutes égales.

Tirons préſentement par le Point M la Ligne MK perpendiculairement à l'Axe prolongé; & les Triangles ſemblables LMI, HBO, donneront BH. BO :: LM. IM. Pareillement des Triangles ſemblables BT*n*, MK*f*, on tirera BT ou BH. B*n* ou OC :: MK. M*f*. Donc (en multipliant par ordre les termes de ces deux proportions) on aura $\overline{BH}^2$. BO × OC :: LM × MK. IM × M*f*. Or (42) LM × MK = $\overline{BH}^2$; donc IM × M*f* = BO × OC. C. Q. F. D.

55. Réciproquement, ſi l'on tire des Lignes IM parallèlement à CR, de manière que IM × IC ou M*f* = toujours BO × OC; le Point M ſera à l'Hyperbole.

On ſuppoſe que BO = OC. ce qui arrivera toujours en coupant l'Angle LCR en deux parties égales par l'indéterminée CP; & tirant OB, en un Point quelconque

O ; parallèlement à CR. L'on ſuppoſe encore que HBT, ainſi que LMK ſoient perpendiculaires ſur l'indéfinie CP.

DÉM. BH. BO :: LM. IM ; & BT ou BH. B*n* ou OC :: MK. M*f* ou IC. Ainſi (en multipliant par ordre les termes de ces deux proportions) $\overline{BH}^2$. BO × OC :: LM × MK. IM × IC. Or (ſupp.) IM × IC = BO × QC. Donc LM × MK = $\overline{BH}^2$; par conſéquent le Point M eſt à l'Hyperbole (43).

56. COR. Et, comme le Point M a été pris à liberté, il s'enſuit que tous les Rectangles quelconques, tels que IM × M*f*, ou IM × IC, ſont égaux entr'eux ; parce qu'on les trouvera toujours égaux au même Rectangle déterminé BO × OC.

57. REMARQ. 1°. Le Rectangle BO × OC, ou plûtôt le quarré $\overline{OC}^2$ eſt ce que les Géomètres appellent la *puiſſance de l'Hyperbole ;* qui eſt toujours égale à la quatriéme partie de la ſomme des quarrés des deux demi-Axes CB, CD ; puiſque OC n'étant que la moitié de l'Hypothénuſe BD, on aura $\overline{OC}^2 = \frac{\overline{BD}^2}{4}$; or $\overline{BD}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2$; donc $\overline{OC}^2 = \frac{\overline{CB}^2 + \overline{CD}^2}{4}$.

2°. Tous les Rectangles IM × IC ſont donc égaux à la *puiſſance de l'Hyperbole.* Ainſi, en connoiſſant un de ces Rectangles, la Racine quarrée de cette *puiſſance* ſera aiſément connue ; puiſque cette Racine ſera une moyenne proportionelle entre les deux côtés du Rectangle donné.

3°. De plus, ſi l'Angle HCT des *Aſymptotes* étoit droit, l'Angle BOC le ſeroit auſſi ; & par conſéquent $\overline{BC}^2 = 2\overline{OC}^2 = 2IM \times IC$; donc $BC = \sqrt{2IM \times IC}$, c'eſt-à-dire qu'en ce cas, le premier demi-Axe BC, qui diviſe toujours l'Angle des *Aſymptotes* en deux parties égales (conſt. du n°. 42.), eſt égal à la Racine quarrée du double de la *Puiſſance* de l'Hyperbole.

58. PROP. VI. Par un Point quelconque S (fig. 74.) tirez

à liberté une Ligne SHQR, coupant les branches de l'Hyperbole aux Points H, Q, & les *Aſymptotes* en R, S; & vous aurez toujours RQ = SH.

DÉM. Menez d'abord les Lignes H*d*, H*n*; & Q*o*, Q*b*, parallèles aux *Aſymptotes* CS, CR; & rappellez-vous que tous les Rectangles, tels que Q*b* × Q*o*, & H*n* × H*d*, ſont égaux entr'eux (56); vous aurez donc Q*b* × Q*o* = H*n* × H*d*; ainſi Q*b*. H*d* :: H*n*. Q*o*: mais les Triangles ſemblables RQ*b*, RH*d*, donnent Q*b*. H*d* :: RQ. RH. Donc RQ. RH :: H*n*. Q*o*; or (à cauſe des Triangles ſemblables SH*n*, SQ*o*) H*n*. Q*o* :: SH. SQ; par conſéquent RQ. RH :: SH. SQ. Donc RH — RQ. RQ :: SQ — SH. SH, ou HQ. RQ :: HQ. SH. D'où il eſt clair que RQ = SH. C. Q. F. D.

59. Réciproquement, ſi l'on prend ſur une Ligne SR, terminée par les côtés d'un Angle SCR, la partie SH = RQ, les Points Q, H, ſeront à l'hyperbole.

DÉM. Conſervant la même conſtruction que ci-deſſus, nous aurons Q*b*. H*d* :: RQ. RH :: SH. SQ (puiſque RQ égalant SH (ſupp.), RH doit égaler SQ) :: H*n*. Q*o*. Donc Q*b*. H*d* :: H*n*. Q*o*. Ainſi Q*b* × Q*o* = H*d* × H*n*: mais, ſi l'on coupoit l'Angle SCR en deux parties égales; & que cherchant une moyenne proportionelle entre Q*b* & Q*o*, on la tranſportât de C en G, & que l'on tirât GB parallèlement à CR; laquelle Ligne GB ſeroit égale, en ce cas, à GC; l'on auroit Q*b* × Q*o* = GB × GC = H*d* × H*n*; donc les Points Q, H, ſeront à l'hyperbole (55).

60. COROL. Ainſi, de quelque manière que l'on tire dans l'Angle des Aſymptotes, une Ligne SR terminée par ces Aſymptotes, & coupant ou rencontrant l'hyperbole, la partie SH de cette Ligne, compriſe entre une branche de la Courbe & ſon Aſymptote voiſine CS, ſera toujours égale à une autre partie RQ de cette même Ligne, compriſe entre l'autre branche de la Courbe & ſon Aſymptote voiſine CR. Ce que l'on doit bien remarquer; car cette propriété de l'hyperbole va nous ſervir à déterminer la manière de tirer une Tangente à cette Courbe, par un de ſes Points donné quelconque.

61. PROPOS. VII. Prenons sur l'hyperbole un Point quelconque H (fig. 75.), par lequel nous mènerons H*n* parallèlement à l'Asymptote CR; après quoi faisant *n*S = *n*C, si du Point S nous menons par le Point donné H l'indéfinie SHR; cette Ligne sera Tangente en H; c'est-à-dire qu'elle ne touchera la Courbe qu'au seul Point H.

DÉM. Si SR rencontroit l'hyperbole en un autre Point quelconque *d*, on auroit S*d* = HR (58 & 60); mais, à cause des Triangles semblables S*n*H, SCR (const.), S*n*. *n*C :: SH. HR. Or S*n* = *n*C (const.); donc SH = HR. Ainsi, puisque S*d* égaleroit aussi HR, on auroit S*d* = SH; ce qui est absurde. Il n'est donc pas possible que SR rencontre l'hyperbole en un autre Point que H, en supposant la construction de l'énoncé; & par conséquent SR est une Tangente. C. Q. F. D.

On voit par la construction de cette Proposition, qu'une Ligne SR terminée par les Asymptotes, & coupée en deux parties égales au Point, où elle rencontre l'hyperbole, est nécessairement une Tangente.

62. Réciproquement, si une Ligne SR terminée par les Asymptotes, est Tangente de l'hyperbole en quelque Point H, elle sera nécessairement coupée en deux parties égales au Point de contingence.

DÉM. Car, pour avoir une Tangente au Point H, il faut, ainsi qu'on vient de le voir, mener une parallèle à CR; faire *n*S = *n*C; & tirer par les Points S, H, une Ligne SHR, laquelle sera Tangente en H (61); & par conséquent elle ne sera pas différente de la supposée: étant assez évident qu'au même Point, il n'est pas possible de tirer à la même Courbe deux Tangentes différentes. Or SHR est coupée en deux parties égales au Point de contingence H (const.); donc la supposée le sera aussi. C. Q. F. D.

63. COR. I. D'où il suit que la Ligne HBT (fig. 71.), menée au Sommet B de l'hyperbole, parallèlement au second Axe GD, est Tangente en ce Point; puisqu'elle y est coupée en deux parties égales (const.).

* 64. COR. II. Si par un Point H (fig. 75.) d'une hy-

perbole, l'on mène un premier Diamètre HC*h* (50); une Tangente SHR (61), & les parallèles HG, H*g*, aux Aſymptotes CS, CR, juſqu'à ce qu'elles rencontrent la Ligne G*Cg*, menée par le centre C parallèlement à la Tangente SHR; cette Ligne G*Cg* ainſi déterminée, & que l'on appelle *ſecond Diamètre conjugué* au premier Diamètre HC*h*, ſera coupée en deux parties égales au centre C, & de plus elle ſera égale à la Tangente SR.

DÉM. Car les Lignes SC, H*g*, étant parallèles, ainſi que les Lignes SH, C*g* (conſt.), il eſt évident que C*g* = SH. Or SH = HR (62); donc C*g* = HR; mais HR = GC, puiſque la figure CGHR eſt un parallèlogramme (conſt.); donc C*g* = GC. Par conſéquent le Diamètre conjugué G*Cg* eſt coupé en deux parties égales au centre C de l'hyperbole, & eſt égal à la Tangente SHR; car les moitiés HR, GC, étant égales, il faut que leurs doubles G*g*, SR, le ſoient auſſi. C. Q. F. D.

* 65. COR. III. Par l'autre extrêmité *h* du Diamètre H*h*, ayant tiré la Ligne *thu* parallèlement à la Tangente SHR, cette Ligne *thu* ſera auſſi Tangente au Point *h* de l'hyperbole oppoſée.

DÉM. A cauſe des Triangles ſemblables *h*C*u*, HCS, & de HC = C*h* (52), il eſt clair que HS = *hu*; de même les Triangles ſemblables *h*C*t*, HCR, feront connoître que HR = *ht*; or HS = HR (62); donc *hu* = *ht*; c'eſt-à-dire que la Ligne *tu* eſt coupée en deux parties égales, par la rencontre de l'hyperbole au Point *h*; & par conſéquent cette Ligne eſt Tangente de l'hyperbole oppoſée (61).

* 66. COROL. IV. Les Lignes H*n*G, H*pg*, menées du Point de contingence H aux extrêmités G, *g*, du Diamètre conjugué G*g*, ſont auſſi coupées en deux parties égales aux Points *n*, *p*, où elles rencontrent les Aſymptotes CS, CR; c'eſt-à-dire que *gp* = *p*H, & G*n* = *n*H. Ce qui eſt aſſez clair; puiſque H*g* étant parallèle à CS (conſt.), l'on a 1°. GC. C*g* :: G*n*. *n*H. Or GC = C*g* (64); donc G*n* = *n*H. 2°. Ayant encore HG parallèle à CR; *g*C. CG :: *gp*. *p*H. Or *g*C = CG; donc *gp* = *p*H. C. Q. F. D.

* 67. COR. V. Ainſi les Aſymptotes CS, CR, de l'hyperbole étant données, avec un Point H de cette Courbe; pour en avoir deux Diamètres conjugués, l'un deſquels paſſe par le Point H, il n'y a qu'à tirer par le centre C la Ligne HC*h*; faire HC = C*h*; du Point H tirer H*n* parallèlement à l'Aſymptote CR; prolonger H*n* enſorte que *n*G = H*n*, & tirer GC*g* coupée en deux parties égales au centre C; alors les deux Lignes HC*h*, GC*g*, ſeront deux Diamètres conjugués de l'hyperbole.

DÉM. En tirant par le Point H, la Ligne SHR terminée par les Aſymptotes & parallèle à la Ligne GC*g*, on trouvera que les Triangles H*n*S, G*n*C, étant ſemblables, & ayant les côtés égaux H*n*, *n*G (conſt.), donneront GC = SH : mais, (à cauſe du parallèliſme des Lignes GC, HR, & de celui des Lignes HG, CR (conſt.)), il eſt évident que GC = HR; donc SH = HR; la Ligne SHR eſt donc Tangente en H (61); donc la Ligne GC*g*, qui lui eſt égale & parallèle, eſt le Diamètre conjugué au Diamètre HC*h* (64). C. Q. F. D.

* 68. COR. VI. Si avec les deux Diamètres conjugués H*h*, G*g*, (fig. 75.) dont H*h* eſt le premier, ou coupe l'Hyperbole, on vouloit déterminer les Aſymptotes de cette Courbe; il faudroit joindre les extrêmités G, *g* du ſecond Diamètre par les Lignes HG, H*g*; & tirer du centre C par les Points de milieu *n*, *p*, de ces Lignes, les indéfinies CS, CR, qui ſeroient les Aſymptotes cherchées. Puiſque, ſi l'on avoit ſuppoſé les Aſymptotes de la Courbe, elles auroient coupé par le milieu les Lignes HG, H*g* (66); & n'auroient par conſéquent pas été différentes des indéfinies CS, CR, que l'on vient de trouver; il faut donc que ces indéfinies ſoient les Aſymptotes que l'on cherchoit.

* 69. COR. VII. Par un Point quelconque L de l'Hyperbole, différent de H, tirons parallèlement à la Tangente SHR, la Ligne M*m* terminée aux Points M, *m*, des Aſymptotes; & il arrivera que le Diamètre HC*h*, prolongé du côté de K, coupera en deux parties égales au Point P, la Ligne L*l* terminée par la Courbe.

DÉM. La Tangente SHR étant coupée en deux parties égales au Point de contingence H (62) par la Ligne *h*P, ſa parallèle M*m* le ſera auſſi en P; ainſi ML + LP = *ml* + P*l*; or ML = *ml* (60); donc LP = P*l*. Donc, &c.

* 70. Réciproquement, 1°. ſi une corde L*l* de l'Hyperbole eſt coupée en deux parties égales en un Point P, par un Diamètre *h*K; cette Ligne L*l* ſera néceſſairement parallèle à la Tangente SHR, tirée par le Point H où le Diamètre coupe la Courbe.

Car, ſi dans ces circonſtances, L*l* n'étoit pas parallèle à la Tangente SHR, on pourroit donc du Point *l* mener à cette Tangente une parallèle *lx*, laquelle tombant au-deſſus ou au-deſſous de L*l*, ſeroit coupée en deux parties égales au Point *y*, par la rencontre du Diamètre *h*K (69); & l'on auroit *l*P. PL : : *ly*. *yx*; donc la corde L*x* ſeroit parallèle à P*y* ou au Diamètre *h*K; & par conſéquent une parallèle à un Diamètre de l'Hyperbole, pourroit couper cette Courbe en deux Points. Ce qui eſt abſurde, vû que l'Hyperbole s'écarte toujours de plus en plus de l'un de ſes Diamètres quelconques.

2°. Si deux cordes parallèles L*l*, *x*T d'une hyperbole ſont coupées en deux parties égales par la Ligne KP, cette Ligne prolongée paſſera néceſſairement par le centre C de la Courbe.

Car, ſi elle n'y paſſoit pas, on pourroit tirer de ce centre une autre Ligne au Point de milieu P de la Ligne L*l*; ce qui feroit que L*l* ſeroit parallèle à la Tangente au Point, où cette autre Ligne rencontreroit la Courbe (Art. 1°.); par conſéquent *x*T ſeroit auſſi parallèle à cette Tangente, &, par là, coupée en deux parties égales par la Ligne tirée du centre (69); mais (ſupp.) *x*T eſt auſſi coupée en deux parties égales par KP, & en un Point différent de celui où la ſuppoſée la rencontre, autrement, ayant les deux Points communs P, K, elles co-incideroient: la Ligne *x*T auroit donc deux Points de milieu. Ce qui eſt abſurde. Ainſi toute Ligne KP, qui joint le milieu de deux cordes parallèles dans l'hyperbole, paſſe néceſſairement par le centre de cette Courbe.

71. DÉF. On appelle *Ordonnée* à un Diamètre quelconque H*b* de l'hyperbole, toute Ligne telle que LP ou P*l*, tirée par un Point quelconque P de ce Diamètre prolongé, parallèlement à la Tangente SHR au Point H, où passe ce Diamètre.

72. COR. VIII. Tout premier Diamètre HC*b*, différent de l'Axe, fait des Angles obliques avec ses Ordonnées; ou, ce qui revient au même, avec les Tangentes SHR, *thu*, menées par les Points H, *b*, où ce Diamètre rencontre les hyperboles opposées.

DÉM. Tirant le demi-Axe CA, indéfiniment prolongé du côté de *r*, on pourra du point *b* lui mener l'Ordonnée ou la perpendiculaire *br*; &, comme toute Tangente de l'hyperbole doit nécessairement rencontrer l'Axe de cette Courbe en quelque Point *e* (27); il s'ensuit que la figure *ber* est un Triangle-Rectangle en *r*; ainsi l'Angle *ber* est aigu & *be*C est obtus; donc l'Angle C*be* est aigu. Ce qui démontre la vérité de ce Corollaire.

73. COR. IX. D'où il suit que l'Axe est le seul premier Diamètre qui fasse des Angles droits avec ses Ordonnées.

* 74. COR. X. Le quarré $\overline{LP}^2$ ou $\overline{Pl}^2$ d'une Ordonnée quelconque à un premier Diamètre prolongé H*b*, est au Rectangle *b*P × HP du Diamètre intercepté *b*P par l'Abcisse HP, comme le quarré $\overline{Gg}^2$ du Diamètre conjugué G*g* est au quarré $\overline{Hb}^2$ du Diamètre H*b*.

DÉM. Par le Point *l* de l'hyperbole tirons *l*Q, *l*N, parallèles aux Asymptotes CS, CR; & laissant le reste comme ci-dessus, faisons CH = C*b* = *a*, ainsi H*b* = 2*a*, & $\overline{Hb}^2 = 4aa$; CG = C*g* = SH = HR = *b*; donc G*g* = 2*b*, & $\overline{Gg}^2 = 4b^2$; C*p* ou *n*H = *c*; H*p* = *d*; LP = P*l* = *z*; CQ = N*l* = *r*; Q*l* = *s*; CP = *s*; par conséquent *b*P = *s* + *a*, & HP = *s* − *a*; donc *b*P × HP = $\overline{s+a} \times \overline{s-a} = ss - aa$.

Cela posé; à cause des Triangles semblables CHR, CPm; l'on aura CH. HR :: CP. Pm = PM, ou $a.b :: s.$ $\frac{bs}{a}$ = Pm ou PM; ainsi lm = Pm — Pl = $\frac{bs}{a}$ — z, & lM = PM + Pl = $\frac{bs}{a}$ + z.

Pareillement les Triangles semblables RHp, mlQ, donnent HR. Hp :: lm. lQ, ou $b.d :: \frac{bs}{a} - z. \frac{bds - adz}{ab}$ = lQ. Et l'on tire encore des Triangles semblables HSn, lMN, SH. Hn :: lM. lN, ou $b.c :: \frac{bs}{a} + z. \frac{bcs + acz}{ab}$ = lN. Mais lQ × lN = Hp × pC (56); c'est-à-dire (en substituant les valeurs analytiques $\frac{bds - adz}{ab}$, $\frac{bcs + acz}{ab}$, d, c, de ces Lignes) $\frac{b^2cds^2 - a^2cdz^2}{a^2b^2}$ = cd; donc (en divisant par cd, & multipliant ensuite par a^2b^2) $b^2s^2 - a^2z^2 = a^2b^2$; ainsi (en transposant) $b^2s^2 - a^2b^2 = a^2z^2$ (D), ou $s^2 - a^2 \times b^2 = a^2 \times z^2$; d'où l'on tire $z^2.s^2 - a^2 :: b^2.a^2 :: 4b^2.4a^2$, ou $\overrightarrow{LP}^2.bP \times HP :: \overrightarrow{Gg}^2.\overrightarrow{Hb}$.

75. REMARQ. On voit par ce Corollaire, que les propriétés de l'hyperbole, par rapport à ses Axes, établies dans la Prop. 3. ainsi que dans les Corollaires ou les propositions qui s'en déduisent, conviennent aussi aux Diamètres conjugués de cette Courbe.

* 76. COR. II. Ainsi 1°. les quarrés des Ordonnées à un premier Diamètre quelconque, seront entr'eux comme les Rectangles des Diamètres interceptés par les Abcisses correspondantes; c'est-à-dire que $\overrightarrow{xK}^2.\overrightarrow{LP}^2 :: bK \times HK.$ $bP \times HP$.

2°

2°. Tous les Rectangles indéfinis, tels que ML × Lm, ſeront toujours égaux au même quarré $\overline{HR}^2$ ou $\overline{GC}^2 = bb$, & par conſéquent égaux entr'eux; car, en reprenant l'équation D du n°. 74, on aura (en tranſpoſant) $b^2s^2 - a^2z^2 = a^2b^2$; & par conſéquent $\frac{b^2s^2}{aa} - zz = bb$; ou $\overline{\frac{bs}{a} - z} \times \overline{\frac{bs}{a} + z} = bb$. Or $\frac{bs}{a} - z =$ ML, & $\frac{bs}{a} + z =$ Lm (74); donc ML × Lm = $bb = \overline{HR}^2 = \overline{GC}^2$.

3°. En tirant d'un Point L de l'hyperbole une parallèle LfO à un premier Diamètre HCh, juſqu'à ce qu'elle rencontre les Aſymptotes aux Points f, o; tous les Rectangles, tels que Lf × Lo, ſeront toujours égaux au quarré $\overline{CH}^2 = aa$, & par conſéquent égaux entr'eux.

Pour en être convaincu, on n'a qu'à reprendre l'équation (D) du n°. 74. & l'on aura (en diviſant par bb) $s^2 - a^2 = \frac{a^2z^2}{bb}$; donc (en tranſpoſant) $s^2 - \frac{a^2z^2}{bb} = aa = \overline{s - \frac{az}{b}} \times \overline{s + \frac{az}{b}}$. Or $s - \frac{az}{b} =$ Lf, & $s + \frac{az}{b} =$ Lo. Car les Triang. ſemblables CGS, CIf, donnent CG ou HS. GS ou CH :: CI ou LP. If ou Io (parce que tS étant coupée en deux parties égales en G, ſa parallèle af doit l'être en I, & faire If = Io); c'eſt-à-dire (en ſubſtituant les valeurs analytiques) $b. a :: z. \frac{az}{b} =$ If ou Io; par conſéquent Lf = IL − If = CP − If = $s - \frac{az}{b}$, & Lo = IL + Io = CP + Io = $s + \frac{az}{b}$; ainſi Lf × Lo = $\overline{s - \frac{az}{b}} \times$

$s + \frac{az}{b} = aa$, comme on l'a vû ci-deſſus; donc enfin $Lf \times Lo = aa = \overline{CA}^2$. C. Q. F. D.

4°. On démontrera encore très-facilement que les Lignes Lf, ob, terminées par les hyperboles oppoſées & par les Aſymptotes, ſont égales; en tirant par b une Ordonnée au Diamètre Hb; laquelle Ordonnée ſe trouvera égale à LP; d'où il ſera clair que $Lf = Ob$.

5°. Si l'on fait $Hb. Gg :: Gg. p$, ou $2a. 2b :: 2b. p = \frac{2bb}{a}$; alors p ou $\frac{2bb}{a}$ ſera le *Paramètre* du Diamètre Hb. Et ainſi l'on trouvera que $4aa. 4bb :: 2a. p$, ou que $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$. Par conſéquent, en reprenant l'équation (D) du n°. 74. & diviſant par bb, pour avoir $ss - aa = \frac{aazz}{bb}$ (L), ſi l'on ſubſtitue dans cette dernière équation l'expreſſion $\frac{2a}{p}$ au lieu de $\frac{aa}{bb}$, elle deviendra $ss - aa = \frac{2azz}{p}$: équation tout-à-fait ſemblable à celle du n°. 37. ainſi que l'équation $ss - aa = \frac{aazz}{bb}$ (L) reſſemble parfaitement à celle du n°. 17. de ſorte que les équations de l'hyperbole par rapport à ſes Axes, & aux Paramètres de ces Axes, ne différent des équations de la même Courbe, par rapport à deux de ſes Diamètres conjugués quelconques, & aux Paramètres de ces Diamètres, qu'en ce que les Axes ſont entr'eux des Angles droits, au lieu que les Diamètres conjugués ſont entr'eux des Angles obliques.

6°. En ſuppoſant les Diamètres conjugués égaux; c'eſt-à-dire, en faiſant $a = b$; l'équation $ss - aa = \frac{aazz}{bb}$

deviendra $ss - aa = zz$, qui eſt l'équation de l'*Hyperbole équilatère*, par rapport à deux de ſes Diamètres conjugués quelconques. Effectivement, puiſque dans l'*Hyperbole équilatère* les deux Axes conjugués ſont égaux (18), l'Angle SCR des Aſymptotes eſt droit (19); donc, ſi du Point H, milieu de SR = Gg, on décrivoit un Cercle avec HS ou HR, il paſſeroit par le centre C de l'hyperbole; & l'on auroit HC = HS, ou 2HC = 2HS, c'eſt-à-dire Hh = SR; mais SR = Gg; donc $Hh = Gg$; par où l'on voit que dans l'*Hyperbole équilatère*, il y a égalité entre deux Diamètres conjugués quelconques, ainſi qu'entre les Axes.

* 77. PROP. VIII. Par deux Points quelconques M, l, de l'hyperbole (fig. 76.), tirons les Tangentes CMS, dlN, terminées par les Aſymptotes aux Points, C, S; d, N; & traçons les Lignes Cd, NS. il arrivera néceſſairement que ces deux dernières Lignes ſeront parallèles, ou que OC. ON :: Od. OS.

DÉM. Par les Points de contingence M, l, menons les Lignes MP, lG, parallèles à l'Aſymptote Od, & nous aurons MP × PO = lG × GO (56). Donc PO. GO :: lG. MP, ou 2 PO. 2 GO :: 2 lG. 2 MP (D): mais CP = PO, puiſque (62) CM = MS; donc OC = 2 PO ou 2 CP.

De même MP étant parallèle à OS (conſt.), on aura OC. CP :: OS. MP. Or OC = 2 CP; donc OS = 2 MP. &, comme Nl = ld (62), NG = GO; ainſi ON = 2 GO ou 2 NG. Par conſéquent, lG étant parallèle à Od (conſt.) ON. NG :: Od. lG; mais ON = 2 NG; donc Od = 2 lG.

En mettant donc, dans la proportion D trouvée ci-deſſus, les valeurs que nous venons de déterminer; c'eſt-à-dire, OC pour 2 PO; ON pour 2 GO; Od pour 2 lG, & OS pour 2 MP; on aura OC. ON :: Od. OS. Ce qui démontre que Cd eſt parallèle à NS, ainſi qu'on s'étoit propoſé de le prouver.

* 78. COR. Puiſque NS eſt parallèle à Cd, CN. ON :: dS. OS.

* 79. PROP. IX. Si l'on mène la Ligne Ml par les Points

de contingence M, *l*, elle ſera parallèle aux Lignes C*d*, NS.

DÉM. Car C*d* eſt parallèle à NS (77); ainſi des Points M, *l*, abbaiſſant les Perpendiculaires TMK, S*l*F; 1°. les deux Triangles ſemblables TMS, CMK, donneront CM. MS :: MT. MK. Or CM = MS (62); donc MT = MK. Donc MK = $\frac{KT}{2}$ ou $\frac{FS}{2}$. 2°. Des Triangles ſemblables *dl*F, N*l*S, on tirera *dl*. *l*N :: *l*F. *l*S. Or *dl* = *l*N (62). Donc *l*F = *l*S; donc *l*F = $\frac{FS}{2}$; or on a vû (art. 1°.) que MK = $\frac{FS}{2}$; par conſéquent la Perpendiculaire MK = la Perpendiculaire *l*F; donc M*l* parallèle à C*d*: mais C*d* parallèle à NS (77). Ainſi M*l* eſt parallèle aux deux Lignes C*d*, NS. C. Q. F. D.

* 80. PROP. X. Les Tangentes CMS, *dl*N, ſont diviſées par les Points de contingence M, *l*, & par le Point *x*, où elles ſe coupent; de manière que les parties de l'une ſont proportionelles aux parties de l'autre; c'eſt-à-dire que CM. *dl* :: M*x*. *lx* :: *x*S. *x*N.

DÉM. C*d* étant parallèle à M*l* (79), on a CM. *dl* :: M*x*. *lx*: & M*x*. *lx* :: *x*S. *x*N, parce que les Triangles *x*M*l*, *x*NS, ſont ſemblables. Par conſéquent CM. *dl* :: M*x*. *lx* :: *x*S. *x*N. C. Q. F. D.

* 81. COR. Donc CM. M*x* :: *dl*. *lx*. ainſi CM + M*x*. M*x* :: *dl* + *lx*. *lx*; c'eſt-à-dire, C*x*. M*x* :: *dx*. *lx*, ou M*x*. C*x* :: *lx*. *dx*.

* 82. PROP. XI. Tirons un premier Diamètre quelconque O*l*P (fig. 77.) & par le Point *l*, où il rencontre ſa Courbe, la Tangente N*ld*, afin de mener à ce Diamètre une Ordonnée quelconque PM. De plus, faiſons paſſer par le Point M la Tangente CMS; je dis que cette Tangente rencontrera le Diamètre O*l*P, en un Point R au-deſſous du centre O; de manière que l'on aura OP. O*l* :: O*l*. OR.

DÉM. Prolongeons l'Ordonnée PM, juſqu'à ce qu'elle

coupe l'Aſymptote OC au Point G ; & tirons lK parallèlement à la Tangente CS. Après cela, conſidérons 1°. que la Tangente CS rencontre le Diamètre OP, en quelque Point R au-deſſous du Point O ; puiſque cette Tangente, qui eſt toujours au-deſſous de O, va de l'Aſymptote OC à l'Aſymptote Od, entre leſquelles paſſe néceſſairement le premier Diamètre OP.

2°. Il faut à préſent démontrer que $OP.Ol :: Ol.OR$. mais (à cauſe des parallèles lN, PG) on a $Pl.Ol :: GN.ON$, ou $\frac{Pl}{Ol} = \frac{GN}{ON} = \frac{GN \times NC}{NC \times ON}$. Or GM étant parallèle à Nx (conſt.), $GN.NC :: Mx.Cx :: lx.dx$ (81) :: $KS.dS$ (à cauſe de lK parallèle à xS (conſt.)) ; par conſéquent $GN.NC :: KS.dS$, ou $\frac{GN}{NC} = \frac{KS}{dS}$.

De plus $NC.ON :: dS.OS$ (78) ; donc $\frac{NC}{ON} = \frac{dS}{OS}$. Donc, (en ſubſtituant dans l'équation $\frac{Pl}{Ol} = \frac{GN \times NC}{NC \times ON}$, la grandeur $\frac{KS}{dS}$ au lieu de $\frac{GN}{NC}$, & $\frac{dS}{OS}$ au lieu de $\frac{NC}{ON}$) on aura $\frac{Pl}{Ol} = \frac{KS}{OS}$. Or, à cauſe des parallèles lK, RS (conſt.), $KS.OS :: lR.OR$, ou $\frac{KS}{OS} = \frac{lR}{OR}$. Donc $\frac{Pl}{Ol} = \frac{lR}{OR}$, ou $Pl.Ol :: lR.OR$. Ainſi $Pl + Ol.Ol :: lR + OR.OR$, c'eſt-à-dire $OP.Ol :: Ol.OR$. C. Q. F. D.

* 83. Réciproquement, ſi après avoir tiré une Ordonnée PM à un Diamètre quelconque OP, on cherche une troiſiéme proportionelle aux deux Lignes OP, Ol ; & que l'ayant portée de O en R, l'on tire la Ligne MR ; je dis

que cette Ligne MR eſt Tangente à l'hyperbole.

DÉM. Si elle n'étoit pas Tangente au Point M, on pourroit donc en tirer une en ce Point, laquelle iroit rencontrer le Diamètre OP, en quelque Point V au-deſſus ou au-deſſous de R : mais, en ſuppoſant OP. $Ol :: Ol.$ OR, il eſt abſolument impoſſible que VM ſoit Tangente; puiſque VM étant ſuppoſée Tangente, l'on auroit (82)

$OP. Ol :: Ol. OV$; ainſi $OV = \frac{\overline{Ol}^2}{OP}$: mais (ſupp.) $OP. Ol :: Ol. OR$; donc $OR = \frac{\overline{Ol}^2}{OP}$; par conſéquent OV égaleroit OR. Ce qui eſt abſurde.

84. REMARQ. Voilà donc une autre manière d'avoir une Tangente à l'hyperbole. Mais cette réſolution s'eſt faite attendre long-tems. Les commençans trouveront ſans doute, que l'on va lentement & aſſez difficilement à cette découverte. Il n'eſt donc pas hors de propos de reprendre notre méthode de tirer les Tangentes des Courbes; afin qu'ils voyent combien elle eſt étendue & expéditive, en comparaiſon de la méthode précédente, qui eſt conforme à la manière des Anciens.

85. PROB. Trouver l'expreſſion de OC, en ſuppoſant que OH ſoit Tangente. (fig. 70.)

RÉSOL. Repréſentons nous d'abord que OH ſoit ſécante de l'hyperbole aux Points H, E; & tirons les Ordonnées HE, ER, à l'Axe ou au Diamètre; & c'eſt là toute la conſtruction.

Il eſt évident que $OC = CE - OE$; c'eſt-à-dire que OC eſt égale à l'indéterminée CE moins la ſous-Tangente OE; cherchons donc l'expreſſion de la ſous-Tangente.

1°. Et pour cela faiſons $CA = BC = a$; $CE = x$; $ER = r$; $OE = s$; $OC = CE - OE = x - s$; $OR = OE + ER = s + r$; $BR = BC + CE + ER = a + x + r$; $AR = CE + ER - CA = x + r - a$; ainſi $BR \times AR = a + x + r \times x + r - a = xx +$

$2rx + rr - aa$; AE $=$ CE $-$ CA $= x - a$; BE $=$ CE $+$ BC $= x + a$. Donc BE $\times$ AE $= x + a \times x - a = xx - aa$.

2°. Cela ſuppoſé, les Triangles ſemblables ORL, OEH, donnent OR. OE :: RL. EH, ou $\overline{\text{OR}}^2$. $\overline{\text{OE}}^2$ :: $\overline{\text{RL}}^2$. $\overline{\text{EH}}^2$. Mais (4) $\overline{\text{RL}}^2$. $\overline{\text{EH}}^2$ :: BR $\times$ AR. BE $\times$ AE. Ainſi BR $\times$ AR. BE $\times$ AE :: $\overline{\text{OR}}^2$. $\overline{\text{OE}}^2$. C'eſt-à-dire (en ſubſtituant les valeurs analytiques des termes de cette dernière proportion, trouvés art. 1°,) $xx + 2rx + rr - aa$. $xx - aa$ :: $ss + 2rs + rr$. ss; donc (en ſouſtrayant) $2rx + rr$. $xx - aa$ :: $2rs + rr$. ss. Ainſi (en faiſant le produit des Extrêmes & celui des moyens) l'on aura $2rs^2x + r^2s^2 = 2rsx^2 + r^2x^2 - 2a^2rs - a^2r^2$; & (en diviſant par r) $2s^2x + rs^2 = 2sx^2 + rx^2 - 2a^2s - a^2r$ (E), qui eſt l'équation où l'on parvient, quand on ſuppoſe OH Sécante; mais lorſque OH devient Tangente, les Points L, H, ſe confondent, & la différence ER $= r$ des Abciſſes s'évanouit; c'eſt-à-dire qu'alors $r = 0$. Il faut donc ôter de l'équation E, tous les termes où r ſe trouve; & elle deviendra $2s^2x = 2sx^2 - 2a^2s$; donc (en diviſant par $2s$) $sx = xx - aa$, ou $s = \frac{xx - aa}{x} =$ OE, qui eſt la ſous-Tangente.

3°. Ainſi OC $=$ CE $-$ OE $= x - \frac{xx + aa}{x} = \frac{xx - xx + aa}{a} = \frac{aa}{x}$; donc OC $= \frac{aa}{x}$, ou OC $\times x = a \times a$. Par conſéquent x. a :: a. OC, ou CE. CA :: CA. OC. Ce qui eſt tout-à-fait ſemblable à ce que l'on a trouvé n°. 82. pour la valeur de OR de la fig. 77.

86. Remarq. Nous ne ſommes parvenus à la valeur de OC par la méthode précédente, qu'au moyen de neuf Propoſitions, dont la neuvième toute ſeule eſt auſſi longue & plus difficile que la réſolution de ce Problême; parce

que l'on y a besoin d'un plus grand nombre de comparaisons que dans ce dernier cas, où tout se trouve par le calcul, moyennant deux Triangles semblables & la propriété de l'hyperbole, établie dans la première Proposition n°. 4.

Mais on se persuadera peut-être, que cette découverte est inutile; puisque l'on n'en a pas absolument besoin, pour tirer des Tangentes à l'hyperbole. Ce qui est très-vrai, quand les Asymptotes entrent dans la résolution de ce Problême. Mais, outre que moyennant cette dernière méthode, l'on peut mener les Tangentes de l'hyperbole, sans le secours des Asymptotes, ayant seulement l'Axe ou un des premiers Diamètres de la Courbe; l'expression $\frac{aa}{x}$ de la Ligne OC, que nous venons de découvrir, va nous servir à trouver deux Points de l'hyperbole, fort importans pour l'application de cette Courbe à la pratique des Arts. Ce que nous ferons voir, après avoir tiré quelques Corollaires de la Proposition précédente.

87. COR. I. Puisque (fig. 70.) la sous-Tangente $OE = \frac{xx - aa}{x}$ (art. 2. du n°. 85.), l'on aura $OE \times x = x + a \times x - a$; c'est-à-dire $x.x + a :: x - a.$ OE, ou CE. BE :: AE. OE sous-Tangente, d'où l'on déduit la Tangente. Ainsi un des Points H de l'hyperbole, & son Axe ou un de ses premiers Diamètres AB étant donnés; pour avoir la Tangente OH, il n'y a qu'à mener l'Ordonnée HE au Diamètre donné (n°. 105. de l'Ellipse) ce qui déterminera la grandeur CE, moyennant laquelle tout le reste se trouve.

88. COROL. II. Pareillement l'expression de OC étant $\frac{aa}{x}$ (art. 3°. du n°. 85.); en retranchant OC de CA, on aura $CA - OC = a - \frac{aa}{x} = \frac{ax - aa}{x} =$ AO, ou AO $\times x = x - a \times a$; d'où l'on tire $x.x - a :: a.$ AO, ou

CE. AE :: CA. AO. Ce qui détermine encore le Point O de la Tangente, quand un Point de la Courbe & un de ſes premiers Diamètres ſont donnés.

89. Cor. III. Remarquons ici qu'une Tangente, tirée en un Point quelconque de l'hyperbole, différent de ſon Sommet, rencontre néceſſairement l'Axe ou un de ſes premiers Diamètres quelconques, en un Point entre le centre de la Courbe & le Sommet; & qu'elle eſt auſſi déterminée à rencontrer une des Aſymptotes dans un ſens oppoſé. Par conſéquent, puiſque l'on trouve toujours $OC = \frac{aa}{x}$ (art. 3. du n°. 85); c'eſt-à-dire CE. CA :: CA. OC; il eſt clair que l'indéterminée CE pouvant croître ſans fin, & devenir infiniment grande en comparaiſon de CA, qui eſt une quantité conſtante; par exemple, CE pouvant devenir cent millions de fois plus grande que CA, la Ligne CA deviendroit auſſi alors cent millions de fois plus grande que OC; ou, ce qui eſt la même choſe, OC ne ſeroit que la cent millionième partie de CA : mais la cent millionième partie de CA ne ſeroit pas une grandeur ſenſible. Ainſi, quand l'indéterminée CE eſt très-grande, par rapport à ſon premier Diamètre, les Points O, C, ſe confondent en quelque ſorte; c'eſt-à-dire, que la Tangente correſpondante rencontre l'Axe ou le Diamètre preſque au centre; & par conſéquent cette Tangente n'eſt preſque pas différente de l'Aſymptote, puiſqu'elle a deux Points communs avec cette Ligne, à très-peu près. On peut donc aſſurer que les Aſymptotes de l'hyperbole, prolongées à une très-grande diſtance, deviennent ſenſiblement des Tangentes à cette Courbe [a].

[a] Si l'on objectoit que tout ceci contredit le n°. 46, où l'on a démontré que les Aſymptotes de l'Hyperbole, prolongées tant que l'on voudra, ne rencontreront jamais cette Courbe, on obſervera que les Aſymptotes ne deviennent Tangentes, que dans le cas où elles ſeroient actuellement prolongées à l'infini; mais ce cas étant impoſſible, c'eſt comme ſi l'on diſoit qu'après un très-grand prolongement, elles approcheront ſi fort d'être Tangentes, que leur différence des Tangentes réelles ſera inſenſible, & non pas plus petite qu'aucune grandeur don-

* 90. COR. IV. Si l'on prolonge la Tangente MO (fig. 78.) indéfiniment vers T, jusqu'à ce qu'elle rencontre en quelque Point H le second Axe GCD, prolongé s'il eſt néceſſaire; & que du Point M l'on abbaiſſe une Perpendiculaire MS ſur ce ſecond Axe, on trouvera que CS. CG :: CG. CH, ou que $CS \times CH = \overline{CG}^2$.

DÉM. Abbaiſſant l'Ordonnée $ME = CS = y$; conſervant aux mêmes Lignes les mêmes dénominations que ci-deſſus, & nous rappellant que $OE = \frac{xx - aa}{x}$ & $OC = \frac{aa}{x}$ (art. 2. & 3. du n°. 85.); ſi nous conſidérons les Triangles ſemblables OEM, OCH, nous aurons OE. EM ou CS :: OC. CH; c'eſt-à-dire (en ſubſtituant les valeurs analytiques) $\frac{xx - aa}{x}. y :: \frac{aa}{x}.$ CH, ou (en ôtant les Fractions) $xx - aa. y :: aa.$ CH. Mais $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ (17). Donc $\frac{aayy}{bb}. y :: aa.$ CH, ou (en faiſant évanouir la Fraction) $aayy. bby :. a^2.$ CH $= \frac{aabby}{aayy} = \frac{bb}{y}.$ Donc

---

née; car ceci ne pourroit avoir lieu que dans l'infini, c'eſt à-dire, qu'au fond, il eſt impoſſible qu'il ait lieu. Ainſi quand, pour démontrer l'égalité de deux grandeurs, on ſe ſert de ce principe, que *deux quantités doivent néceſſairement être égales, ſi leur différence eſt plus petite qu'aucune grandeur donnée*, il faut bien diſtinguer, ſi la Limite dont les deux quantités approchent continuellement, eſt dans le fini ou dans l'infini; dans le premier cas il y aura égalité, parce qu'on démontrera l'impoſſibilité d'aſſigner aucune différence; mais dans le ſecond cas, il en ira autrement; vu que la Limite étant ſuppoſée à une diſtance infinie, c'eſt comme s'il n'y avoit pas de limite; donc, le terme de comparaiſon manquant, le principe n'a plus lieu, & ſe fonder deſſus eſt donner dans un Paralogiſme très-certain, qui conduiroit à cette contradiction manifeſte, que *les Aſymptotes de l'hyperbole ne peuvent jamais rencontrer cette Courbe, & que cependant elles la rencontrent.*

J'ai inſiſté là-deſſus en faveur des Commençans, qui pourroient, à cette occaſion, ſuſpecter le principe de l'*égalité de deux grandeurs, dont la différence eſt démontrée plus petite qu'aucune grandeur donnée*; d'autant plus que je ne connois aucun Géomètre, qui ait fait attention à la néceſſité de ſauver les apparences de la contradiction alléguée.

$CH \times y = bb$, ou $CH \times CS = \overline{CG}^2$. D'où l'on tire CS. CG :: CG. CH. C. Q. F. D.

* 91. COR. V. Aux extrêmités B, A, du premier Axe AB, élevons les Perpendiculaires AV, BT; juſqu'à ce qu'elles rencontrent une Tangente quelconque indéfinie MOT; & l'on verra que le Rectangle $AV \times BT$ de ces Perpendiculaires, eſt égal au quarré $\overline{CG}^2$ de la moitié du ſecond Axe.

DÉM. CE. CA :: CA. OC (Art. 3. du n°. 85); donc CE — CA. CA :: CA — OC. OC, ou AE. CA :: AO. OC, ou, en altern. AE. AO :: CA. OC; donc AE + AO. AO :: CA + OC ou BC + OC. OC; c'eſt-à-dire OE. AO :: OB. OC, ou AO. OE :: OC. OB. mais, (à cauſe des Triangles ſemblables OAV, OEM,) AO. OE :: AV. EM; donc AV. EM :: OC. CB. Or les Triangles ſemblables OCH, OBT, donnent OC. OB :: CH. BT; donc AV. EM ou CS :: CH. BT. Ainſi $AV \times BT = CS \times CH$. Or $CS \times CH = \overline{CG}^2$ (90); donc $AV \times BT = \overline{CG}^2$. C. Q. F. D.

* 92. COR. VI. Si des Points, f, F, (déterminés comme au n°. 29) l'on abbaiſſe les Perpendiculaires FL, fK, ſur la Tangente MT; le produit $fK \times FL$ de ces Perpendiculaires ſe trouvera égal au quarré $\overline{CG}^2$ de la moitié du ſecond Axe. Il faut donc prouver que $fK \times FL = \overline{CG}^2$.

DÉM. 1°. Suppoſant toujours les mêmes dénominations, & faiſant $CF = Cf = c$, pour avoir $cc = aa + bb$ (comme au n°. 29.). $Of = Cf - OC = c - \frac{aa}{x} = \frac{cx - aa}{x}$; $OF = CF + OC = c + \frac{aa}{x} = \frac{cx + aa}{x}$; $AO = CA - OC = a - \frac{aa}{x} = \frac{ax - aa}{x}$; $OB = CB + OC = a + \frac{aa}{x} = \frac{ax + aa}{x}$.

2°. Préſentement, les Triangles ſemblables OAV, OKf, donnent Of. OV :: fK. AV (S); & des Triangles ſemblables OLF, OBT, on tire OF. OT :: FL. BT (T); donc (en multipliant par ordre les termes des deux Proportions S, T) on aura Of × OF. OV × OT :: fK × FL. AV × BT. (D); par conſéquent, ſi l'on démontre que Of × OF = OV × OT, il ſera démontré que fK × FL = AV × BT = $\overline{CG}^2$ (91). Or Of × OF = (art. 1°.) $\frac{cx - aa}{x} \times \frac{cx + aa}{x}$ = $\frac{c^2x^2 - a^4}{xx}$ = $\frac{a^2x^2 + b^2x^2 - a^4}{xx}$ (en ſubſtituant $aa + bb$ en la place de cc). Ainſi il reſte à démontrer que OV × OT = auſſi $\frac{a^2x^2 + b^2x^2 - a^4}{xx}$.

3°. Pour cela, rappellons-nous d'abord que OE = $\frac{xx - aa}{x}$ (art. 2. du n°. 85.); donc $\overline{OE}^2$ = $\frac{\overline{xx - aa}^2}{xx}$, & le Tr.-Rect. OEM nous donne $\overline{OM}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{EM}^2$, ou OM = $\sqrt{\frac{\overline{xx - aa}^2}{xx} + yy}$. Conſidérons préſentement les Triang. ſembl. OEM, OAV, & nous aurons OE. OM :: AO. OV, ou $\frac{xx - aa}{x}$. $\sqrt{\frac{\overline{xx - aa}^2}{xx} + yy}$ :: $\frac{ax - aa}{x}$. OV; donc (en diviſ. les antéced. par $\frac{x - a}{x}$. Et en altern.) $x + a$. a :: $\sqrt{\frac{\overline{xx - aa}^2}{xx} + yy}$. OV (G).

Pareillement les Triangles ſemblables OEM, OBT, nous donneront OE. OM :: OB. OT, ou $\frac{xx - aa}{x}$.

$\sqrt{\frac{xx-aa}{xx}+yy} :: \frac{ax+aa}{x}$. OT ; donc (en divis. les antéced. par $\frac{x+a}{x}$, & en altern.) on aura $x-a.a::\sqrt{\frac{xx-aa}{xx}+yy}$. OT (L). Par conséquent (en multip. par ordre les termes des deux proport. G, L,) on aura $xx-aa.aa::\frac{xx-aa}{xx}+yy$. OV × OT. Donc, en multipl. les Moyens de cette dernière proportion, après y avoir substitué la valeur de $yy=\overline{xx-aa}\times\frac{bb}{aa}$ (23), il viendra (en divis. ce produit par le premier terme $xx-aa$) $OV\times OT=\frac{\overline{xx-aa}\times\overline{xx-aa}}{xx}\times aa+\overline{xx-aa}\times\frac{bb}{aa}\times aa}{xx-aa}=\frac{a^2x^2-a^4}{xx}+bb=\frac{a^2x^2+b^2x^2-a^4}{xx}$. Mais cette valeur de OV × OT est précisément celle que nous avons trouvée (Art. 2°.) pour Of × OF. Par conséquent Of × OF = OV × OT. ainsi (en reprenant la proportion D de l'Art. 2°.), on verra que $fK\times FL=AV\times BT$. Or $AV\times BT=\overline{CG}^2$ (91). Donc enfin $fK\times FL=\overline{CG}^2$. C. Q. F. D.

93. PROP. XII. Après avoir porté du centre C (fig. 70.) l'hypothénuse BD aux Points F, f, de l'Axe des hyperboles opposées ; si l'on tire d'un Point quelconque M de l'une des hyperboles, les Lignes MF, Mf, aux Points F, f, (ainsi qu'on l'a fait au n°. 29) ; & que de plus l'on mène la Tangente Ml au même Point M, je dis que l'Angle fMl = l'Angle lMF ; ou, ce qui est la même chose (n°. 281, *Inst. T.* 2), que Mf. MF :: *fl. lF*.

DÉM. Donnant toujours aux mêmes Lignes les mêmes dénominations que ci-deſſus, rappellons nous le n°. 29, où il a été démontré que $Mf = \frac{cx + aa}{a}$, & $MF = \frac{cx - aa}{a}$; par conſéquent $Mf.\ MF :: cx + aa.\ cx - aa$; mais Cl étant par rapport à la Tangente Ml, ce que OC eſt par rapport à la Tangente OH, on a (art. 3. du n°. 85.) $Cl = \frac{aa}{x}$; donc $fl = Cf + Cl = c + \frac{aa}{x} = \frac{cx + aa}{x}$, Ainſi $fl = \frac{cx + aa}{x}$, & $lF = CF - Cl = c - \frac{aa}{x} = \frac{cx - aa}{x}$; donc $lF = \frac{cx - aa}{x}$. Par conſéquent $fl.\ lF :: cx + aa.\ cx - aa$. Or, on vient de voir que $Mf.\ MF :: cx + aa.\ cx - aa$. Donc $Mf.\ MF :: fl.\ lF$. Et par conſéquent l'Angle fMl = l'Angle lMf. C. Q. F D.

94. Réciproquement, ſi l'on coupe l'Angle fMF en deux parties égales; c'eſt-à-dire, ſi l'Angle fMl = l'Angle lMF, la Ligne Ml ſera Tangente en M. Et pour le démontrer, il ſuffit de faire voir (ſuivant le n°. 83) que CP. CB :: CB. Cl, ou que $Cl = \frac{aa}{x}$; car on ſuppoſe CP = x. (fig. 70.)

DÉM. Puiſque (ſupp.) l'Angle fMl = l'Angle lMF; l'on a (n°. 281. *Inſt. T.* 2.) $Mf.\ MF :: fl.\ lF$; donc $Mf - MF.\ MF :: fl - lF.\ lF$ (G) : or $Mf - MF = 2a$ (31); $MF = \frac{cx - aa}{a}$ (art. 2. du n°. 29.); $fl - lF = Cl + CF - lF = Cl + Cl + lF - lF = 2Cl$; ainſi $fl - lF = 2Cl$; & $lF = \frac{cx - aa}{x}$ (ainſi qu'on vient de le voir (93). Donc, en ſubſtituant dans la proportion G les va-

leurs de $Mf - MF$, MF, $fl - lF$, que l'on vient de trouver, elle deviendra $2a.\frac{cx - aa}{a} :: 2C\mathit{l}.\frac{cx - aa}{x}$; d'où l'on tire $2C\mathit{l} = \frac{\frac{cx - aa \times 2a}{x}}{\frac{cx - aa}{a}} = \frac{\sqrt{cx - aa \times 2a \times a}}{\sqrt{cx - aa \times x}}$

$\frac{2aa}{x}$; ainsi $C\mathit{l} = \frac{aa}{x}$, ou $C\mathit{l} \times x = aa$, donc $x.\ a :: a.$ $C\mathit{l}$, ou $CP.\ CB :: CB.\ C\mathit{l}$, & par conséquent $M\mathit{l}$ est Tangente (83). C. Q. F. D.

95. Cor. I. Prolongeons indéfiniment les Lignes fM, $\mathit{l}M$, jusqu'aux Points b, a, & l'Angle aMb étant égal à son opposé $fM\mathit{l}$, qui est lui-même égal à l'Angle $\mathit{l}MF$ (93), il s'ensuit que l'Angle $aMb = \mathit{l}MF$; c'est-à-dire que l'Angle d'incidence $FM\mathit{l}$ = l'Angle de réflexion bMa. S'il y avoit donc au Point F un corps lumineux, les rayons FM se réfléchiroient, à la rencontre de la Courbe, dans des Lignes Mb, telles que leurs prolongemens, du côté de A, passeroient par l'autre Point f; ainsi, ces rayons réfléchis iroient tous, étant prolongés, se réünir au Point f. Et réciproquement, si l'on plaçoit le corps lumineux en f, tous les rayons seroient réfléchis par la convéxité de la Courbe MBK, de manière que les prolongemens de ces rayons réfléchis se réüniroient tous au Foyer F; comme il est visible, en prolongeant FM du côté de b. C'est pourquoi les Points f, F, sont des *Foyers*; ainsi que nous avions promis de le démontrer au n°. 36.

Cor. II. D'un Point quelconque M (fig. 79) d'une hyperbole, menons les Lignes MF, Mf aux Foyers, F, f; coupons l'Angle fMF en deux parties égales par la Ligne CME; laquelle sera Tangente au Point M de l'hyperbole (94); sur cette Tangente élevons, au Point de contingence M, la Perpendiculaire GML; & par ce même Point menons $MT = Mf$ parallèlement à l'Axe ABS; alors, si des

Points T, f, l'on abbaiſſe ſur GML les Perpendiculaires TL, fG, elles ſeront entr'elles comme le premier Axe AB eſt à la diſtance des Foyers Ff; c'eſt-à-dire que TL. fG:: AB. Ff.

DÉM. 1°. Prolongeons fM du côté de P, & du Point S abbaiſſons SP perpendiculairement ſur fP; après cela, tirons FO parallèlement à GL; afin d'avoir Of pour la différence de Mf à MF; car GL étant Perpendiculaire ſur CE (conſt.), FO le ſera auſſi; donc, puiſque l'Angle FME = OME (conſt.), il eſt clair que MFE = MOE; donc MF = MO; donc Mf — MF = Mf — MO = Of. Ainſi la différence de Mf à MF eſt la Ligne Of. De plus cette Ligne Of = le premier Axe AB; car Mf — MF = AB (31); or Mf — MF = Of, comme on vient de le voir; donc Of = AB. Enfin menons MH perpendiculairement ſur AS.

2°. Cela ſuppoſé, les Triangles-Rectangles ſemblables TML, MSH, donnent TL. MH :: MT ou Mf. MS; or (les Triangles-Rectangles fGM, SPM, étant ſemblables) Mf. MS :: fG. PS; donc TL. MH :: fG. PS, ou TL. fG :: MH. PS. Or (à cauſe des Triangles-Rectangles ſemblables fPS, fHM) MH. PS :: fM. fS; ainſi TL. fG :: fM. fS; mais fM. fS :: Of. fF (à cauſe de OF parallèle à ML (conſt.)); donc TL. fG :: Of. fF :: AB. fF, parce que Of = AB (Art. 1°.). Donc enfin TL. fG :: AB. fF. C. Q. F. D; & ce qu'il eſt très-important de bien remarquer.

97. Réciproquement, ſi l'on abbaiſſe une Perpendiculaire fG ſur la Ligne GML, perpendiculaire à la Ligne CME qui coupe en deux parties égales l'Angle fMF, formé par deux Lignes Mf, MF, menées d'un même Point M d'une hyperbole aux Foyers f, F; & qu'après avoir trouvé une quatrième proportionelle TL aux trois Lignes données fF, AB, fG, l'on conſtruiſe au Point M, ſur le Prolongement de GM du côté de L, le Triangle-Rectangle LMT, dont l'hypothénuſe MT = Mf, & l'autre côté =

$=$ TL [4]; je dis que MT ſera parallèle à l'Axe ABS.

DÉM. TL. fG :: AB. fF (conſt.) :: Of. fF (parce que Of $=$ AB (Art. 1°. du n°. 96) :: fM. fS (à cauſe de OF parallèle à MS) :: MT. fS. (parce que MT $=$ fM (ſupp.)); donc TL. fG :: MT. fS, ou TL. MT :: fG. fS. Ainſi les Triangles-Rectangles MLT, fGS, ſont équiangles (n°. 286. *Inſt. T.* 2.); donc l'Angle TML $=$ l'Angle GSf. La Ligne GML coupe donc les Lignes MT, AS, de manière que les Angles alternes internes ſont égaux; par conſéquent MT eſt parallèle à AS. C. Q. F. D. & ce dont nous ferons uſage.

* 98. COR. III. Tirons à deux Points quelconques d'une hyperbole (fig. 80.) deux Tangentes MS, TQ; & abbaiſſons, du Foyer F, les Perpendiculaires FH, FR, ſur ces Tangentes. Je dis que ces Perpendiculaires croîtront moins, l'une par rapport à l'autre, que dans la raiſon des Racines quarrées des *Rayons vecteurs* FM, FT, tirés du Foyer F aux Points de contingence M, T; c'eſt-à-dire que FH eſt plus grande par rapport à FR, que $\sqrt{FM}$ par rapport à $\sqrt{FT}$. Il faut donc prouver que $\frac{FH}{FR} > \frac{\sqrt{FM}}{\sqrt{FT}}$.

DÉM. 1°. Après avoir tiré du Foyer f de l'hyperbole oppoſée les Lignes fM, fT, aux Points de contingence M, T, on remarquera que l'Angle FMH étant égal à l'Angle fMS (93), les Triangles-Rectangles FHM, fSM, ſont ſemblables; donc FM. fM :: FH. fS $=$ $\frac{FH \times fM}{FM}$, ou fS $\times$ FH $=$ $\frac{\overrightarrow{FH}^2 \times fM}{FM}$. Or $fS \times FH = \overrightarrow{CG}^2$ (92); donc $\frac{\overrightarrow{FH}^2 \times fM}{FM} = \overrightarrow{CG}^2$; ainſi $\overrightarrow{FH}^2 = \frac{\overrightarrow{CG}^2 \times FM}{fM}$.

[4] La conſtruction de ce Triangle-Rectangle ſur le prolongement de GM du côté de L, eſt très-aiſée: car la longueur de l'hypothénuſe MT $=$ Mf étant donnée avec la longueur de TL, (ſupp.) on aura celle de ML, ſur laquelle on conſtruira le Triangle.

2°. Pareillement, l'Angle FTR étant égal à l'Angle fTQ (93), les Triangles-Rectangles FRT, fQT, ſont ſemblables; donc FT. fT :: FR. $fQ = \frac{FR \times fT}{FT}$. Ainſi $fQ \times FR = \frac{\overline{FR}^2 \times fT}{FT}$: mais $fQ \times FR = \overline{CG}^2$ (92); donc $\frac{\overline{FR}^2 \times fT}{FT} = \overline{CG}^2$; ainſi $\overline{FR}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FT}{fT}$. Or l'on a vû (art. 1.) que $\overline{FH}^2 = \frac{\overline{CG}^2 \times FM}{fM}$; par conſéquent $\overline{FH}^2$. $\overline{FR}^2$ :: $\frac{\overline{CG}^2 \times FM}{fM}$. $\frac{\overline{CG}^2 \times FT}{fT}$ :: $\frac{FM}{fM}$. $\frac{FT}{fT}$; donc $\frac{\overline{FH}^2}{\overline{FR}^2} = \frac{\frac{FM}{fM}}{\frac{FT}{fT}} = \frac{FM \times fT}{fM \times FT}$. Mais $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} > \frac{FM}{FT}$, car $\frac{FM \times fT}{fM \times FT}$. $\frac{FM}{FT}$ :: $\frac{fT}{fM}$. 1 :: fT. FM. Or $fT > fM$; donc $\frac{FM \times fT}{fM \times FT} > \frac{FM}{FT}$; & par conſéquent, puiſque $\frac{\overline{FH}^2}{\overline{FR}^2} = \frac{FM \times fT}{fM \times FT}$, on aura $\frac{\overline{FH}^2}{\overline{FR}^2} > \frac{FM}{FT}$; donc (en extrayant les Racines quarrées) $\frac{FH}{FR} > \frac{\sqrt{FM}}{\sqrt{FT}}$. C. Q. F. D.

* 99. COR. IV. Dans l'hyperbole, le ſecond Diamètre indéterminé NS (fig. 81.) tiré parallèlement à une Tangente quelconque Mr, coupe le *Rayon vecteur* FM (mené du Foyer F de l'hyperbole oppoſée au Point M de contingence) en un Point O; de manière que la Partie OM de ce Rayon vecteur, eſt toujours égale à la moitié CB du premier Axe. Il faut donc prouver que OM = CB.

DÉM. Menez FT parallèlement à Mr, & tirez fM juſqu'à ce qu'elle rencontre FT. Maintenant conſidérez 1°. qu'à cauſe du parallèliſme des Lignes FT, NS, Mr,

(conſt.) l'Angle MTF = *r*M*f* = *r*MF (93) = MFT ſon alterne ; donc MTF = MFT ; ainſi MT = MF.

2°. MT. MF :: MS. OM. Or MT = MF (art. 1°.) ; donc MS = OM, ou 2MS = 2OM.

3°. *f*S. ST :: *f*C. CF. Mais *f*C = CF. Donc *f*S = ST. Ainſi *f*S + MS = ST + MS = MT = MF (art. 1°.) ; donc *f*S + MS = MF : mais *f*S + MS = *f*M + 2MS ; donc MF = *f*M + 2MS ; par conſéquent MF — *f*M = 2MS = 2OM (art. 2.) ; or MF — *f*M = AB (31) = 2CB. Donc 2OM = 2CB, ou OM = CB. C. Q. F. D.

100. REMARQ. Telles ſont les propriétés principales, qui caractériſent l'hyperbole ou les hyperboles oppoſées ; & dont l'on a le plus de beſoin dans l'application de cette Courbe à différens Arts, & à la Théorie des loix du mouvement. Cependant, comme nous n'avons point parlé des hyperboles, que l'on a coutume d'aſſocier aux hyperboles oppoſées, nous en dirons un mot, après avoir donné les Problêmes par leſquels nous finirons cet article. Ce qui ſera bien ſuffiſant ; vû que ces hyperboles ont préciſément les mêmes propriétés que celles auxquelles on les aſſocie, & qu'elles ne ſont point néceſſaires pour découvrir les propriétés dont nous avions beſoin. C'eſt même la raiſon pour laquelle il n'en a point encore été queſtion ; afin de ne pas rompre la chaîne de nos Propoſitions.

101. PROB. Conſtruire une hyperbole & ſon oppoſée, de manière que la diſtance de ſes Foyers F*f* ſoit à ſon Axe tranſverſe AB en raiſon donnée, par exemple, comme 3 eſt à 2 (fig. 82.).

RÉSOL. Ce Problême peut être réſolu de pluſieurs manières, dont voici la plus ſimple, à mon gré, la plus sûre & la plus expéditive dans la pratique des Arts. 1°. On prendra la diſtance F*f* des *Foyers*, telle qu'on la jugera néceſſaire pour ce que l'on a en vûe ; on la diviſera en trois parties égales ; enſuite, portant la moitié de l'une de ces parties de *f* en A & de F en B, la diſtance F*f* ſe trouvera diviſée comme on le demande ; puiſque F*f* étant 3 ; A*f*, BF, chacune

$= \frac{1}{2}$ (conſt.), AB ſera $= 2$; & par conſéquent Ff. AB :: 3. 2.

2°. On portera AB ſur une Ligne indéfinie A6; en mettant une des pointes du compas ſur le Point f, on l'ouvrira de manière que ſon ouverture ſoit plus grande que fB; on décrira avec cette ouverture des Arcs en 1, 1; tant du Point f pour l'hyperbole 5B5, que du Point F pour ſon oppoſée 5A5; après quoi portant cette même ouverture de A en 1 ſur la Ligne A6, on prendra ſur cette dernière Ligne la diſtance B1; avec laquelle des Points F, f, on décrira des Arcs qui couperont les premiers en 1, 1, &c. & les Points 1, 1, ſeront aux hyperboles que l'on demande.

Pour avoir d'autres Points, tels que 2, 2, de ces hyperboles, on prendra ſur l'indéfinie A6 une diſtance A2, avec laquelle des Points f, F, on tracera des Arcs en 2, 2, de l'un & l'autre côté de fF. Puis, prenant ſur la même Ligne A6 la longueur B2, des Points, F, f, on tracera d'autres Arcs qui couperont en 2, 2, ceux que l'on vient de tracer avec le rayon A2, pris ſur A6; & les nouveaux Points 2, 2, &c. ſeront encore aux hyperboles 5B5, 5A5.

En ſorte que ces Courbes, conſtruites de cette manière; c'eſt-à-dire, tellement que la différence des Lignes, Lf, LF, (menées d'un Point quelconque 1, 2, &c. du Périmètre de ces Courbes aux Points F, f,) ſoit toujours égale à la Ligne AB, ces Courbes, dis-je, ſeront néceſſairement des *Hyperboles*, dont les Foyers ſeront F, f; leſquelles auront AB pour *premier Axe*, ou *Axe tranſverſe*, & qui ſeront telles que Ff. AB :: 3. 2.

DÉM. Ce dernier cas ayant été prouvé art. 1. il s'agit de démontrer que les Courbes 5B5, 5A5 ainſi conſtruites, ſont des hyperboles, &c. élevons HK perpendiculairement ſur le milieu C de AB; & du Sommet B avec CF ou Cf, décrivons des Arcs qui coupent HK en G, D; afin que GD ſoit le ſecond Axe de ces Courbes (29), au cas que ce ſoient des hyperboles.

Soit maintenant CF $=$ Cf $=$ BG $=$ BD $= c$; AC $=$ CB $= a$; CD $=$ CG $= b$; donc (à cauſe du Triang.

Rectangle BCD) $bb = cc - aa$. Soit encore $LM = y$; $CM = x$; donc $fM = x + c$; $FM = x - c$; $AM = a + x$; $BM = a - x$. Donc $AM \times BM = aa - xx$. De plus, si nous appellons $2f$ la somme des Lignes fL, LF, comme leur différence $= AB$ (const.) $= 2a$, nous aurons la plus grande $fL = f + a$, & la plus petite $LF = f - a$ (n°. 103. *Alg. Inst. T.* 1.). Ceci supposé, remarquons que dans le Triangle-Rectangle fML, $\overline{fL}^2 = \overline{fM}^2 + \overline{LM}^2$, ou $ff + 2af + aa = xx + 2cx + cc + yy$ (T). Pareillement, dans le Triangle-Rectangle FML, $\overline{LF}^2 = \overline{FM}^2 + \overline{LM}^2$, ou $ff - 2af + aa = xx - 2cx + cc + yy$ (S). Donc (en retranchant l'équation S de l'équation T; c'est-à-dire, le premier membre du premier membre, & le second du second) nous aurons $4af = 4cx$, ou $f = \frac{cx}{a}$. Ainsi, en substituant cette valeur de f dans l'équation T, elle deviendra $\frac{c^2x^2}{aa} + 2cx + aa = xx + 2cx + cc + yy$; donc (en ôtant $2cx$ de part & d'autre, & multip. par aa) $c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$; ainsi (en transposant) $c^2x^2 - a^2x^2 = a^2c^2 + a^2y^2 - a^4$, (M): ou $\overline{cc - aa} \times x^2 = \overline{cc - aa} \times aa + a^2y^2$ (M). Or nous avons vû que $cc - aa = bb$; donc (en substituant dans les deux membres de l'équation M, bb en la place de $cc - aa$) on aura $bbxx = aabb + a^2y^2$. Donc $\overline{bbxx - aabb} = a^2y^2$; c'est-à-dire $\overline{xx - aa} \times bb = aa \times yy$; donc $yy.\ \overline{xx - aa} :: bb.\ aa :: 4bb.\ 4aa$. ou $\overline{LM}^2.\ BM \times AM :: \overline{GD}^2.\ \overline{AB}^2$. Ce qui signifie que le quarré de l'Ordonnée LM à la Courbe SBS est au Rectangle de l'Abcisse BM par l'Axe intercepté AM, comme le quarré du second Axe GD est au quarré de l'Axe transverse AB. Or c'est là précisément la propriété de l'hyperbole, établie au n°. 15. Donc les Cour-

bes 5B5, 5A5, ſont des hyperboles telles qu'on les demandoit.

102. Si on propoſoit de conſtruire des hyperboles avec les deux Lignes données AB, GD, pour les deux Axes de ces Courbes; après les avoir diſpoſées à Angles droits, l'une ſur le milieu de l'autre & réciproquement, on porteroit l'hypothénuſe BD, de C aux Points F, *f*, ce qui en détermineroit les Foyers (93 & 95), après quoi on agiroit, pour la conſtruction de ces Courbes, comme au n°. 101.

103. PROB. Une hyperbole LBT étant donnée, trouver ſon centre, ſes Axes, ſes Paramètres, ſon Foyer, ſes Aſymptotes. (fig. 83.)

RÉSOL. 1°. Menez à volonté, dans l'hyperbole, deux paires de cordes parallèles; c'eſt-à-dire, faites LS parallèle à BM, & BT parallèle à *ur*. par les Points de milieu 1, 2, des cordes BM, LS, tirez une Ligne 2 1, prolongée indéfiniment du côté de *x*; il eſt clair (Art. 2. du n°. 70.) que la Ligne 21 ainſi prolongée, doit néceſſairement paſſer par le centre de la Courbe; &, en faiſant la même opération ſur les deux cordes *ur*, BT, la Ligne *ao*, qui paſſe par le milieu de ces cordes, prolongée du côté *y*, paſſera auſſi néceſſairement par le centre de l'hyperbole; par conſéquent le Point C, où ſe rencontrent les deux Lignes 21, *ao*, prolongées, eſt le centre de cette Courbe.

2°. Mettez une des pointes du Compas au centre C, & ouvrant cet inſtrument de manière qu'il puiſſe couper la Courbe en deux Points *x*, *y*, tracez l'Arc *xpy*. Alors, ſi du Point C vous menez, par le milieu *p* de cet Arc, l'indéfinie C*p*Q, ce ſera l'Axe cherché. Car il eſt évident qu'en tirant la corde *xy*, elle ſeroit Perpendiculaire ſur l'indéfinie CQ, & coupée en deux parties égales par cette Ligne. La corde *xy* ſeroit donc une double Ordonnée au Diamètre indéterminé CQ (71, & Art. 1. du n°. 70); mais il n'y a que l'Axe qui ait ſes Ordonnées Perpendiculaires (73); par conſéquent le Diamètre CQ eſt l'Axe de la Courbe.

3°. Le premier Axe étant trouvé, vous aurez le ſecond par le n°. 28.

4°. Ces deux Axes déterminés vous feront découvrir les Paramètres ſuivant le n°. 33. & les Foyers par les n°. 93 & 95.

5°. Enfin vous aurez les Aſymptotes de cette Courbe, en faiſant la Perpendiculaire *bt* au Sommet B du premier Axe, égale au ſecond GD, & telle que $Bb = Bt$; & tirant enſuite du centre C par les extrémités *b*, *t*, les indéfinies CN, CK, qui ſeront les Aſymptotes de la Courbe propoſée (42 & 47.). de ſorte que ce Problême ſe réduit à trouver le centre & le premier Axe de l'hyperbole, moyennant quoi on a tout le reſte.

* 104. PROB. Soient les hyperboles oppoſées HB*x*, *h*A*y*; (fig. 84.) AB, GD, leurs Axes; les Tangentes LBQ, MAN, égales chacune à GD; en tirant LM, QN, l'on aura la figure LMNQ, qui eſt *le Rectangle des Axes circonſcrit* aux hyperboles. Maintenant par un Point quelconque H de l'une de ces hyperboles, tirons un premier Diamètre HC*h*; &, après avoir mené par les Points L, Q, les Aſymptotes CR, CK (42 & 47), tirons H*n* parallèle à CK; faiſons le prolongement $nP = Hn$; afin qu'en tirant PC prolongée juſqu'à ce que $Cp = PC$, nous ayons P*p* pour le ſecond Diamètre conjugué au premier H*h* (67). Alors par les Points H, *h*, menons les Tangentes RHS, V*h*T, leſquelles ſeront chacune égales au ſecond Diamètre P*p* (64); & par conſéquent, ſi nous traçons les Lignes RV, ST, nous aurons la figure RSTV, qu'on appelle *le Parallèlogramme circonſcrit des deux Diamètres conjugués* H*h*, P*p*. Or cette conſtruction étant bien conçue, on demande *quel eſt le rapport du Rectangle circonſcrit* LMNQ *des Axes, au Parallèlogramme* RSTV *des deux Diamètres conjugués* H*h*, P*p*, *circonſcrit aux hyperboles oppoſées.*

RÉSOL. Tirons BG; ce qui fera que le Triangle BCG ſera la huitiéme partie du Rectangle des Axes, puiſque le quarré LBCG en eſt le quart; &, comme BG eſt coupée en O en deux parties égales par l'Aſymptote CR (Dém. du n°. 54.), le Triangle BOC eſt la moitié de BCG; par conſéquent BOC eſt la ſeiziéme partie du Rectangle des

Axes ; car nous avons observé que BCG en étoit le huitiéme.

Pareillement, le Triangle RST étant la moitié du Parallèlogramme circonscrit des Diamètres conjugués, RCS en sera le quart ; RCH le huitiéme, à cause de RH = HS (62) ; & par conséquent le Triangle CH*n* en sera la seiziéme partie, puisque R*n* = C*n* (61). La question se réduit donc à faire voir, quel est le rapport du Triangle BOC au Triangle CH*n*.

Mais, BO, H*n*, étant (par la const.) parallèles à l'Asymptote CK, il a été démontré (56) que H*n* × *n*C = BO × OC ; donc *n*C. OC :: BO. H*n*. Or, en abbaissant les Perpendiculaires H*b*, B*d* sur CR, il est clair que les Triangles BO*d*, H*nb* étant semblables, l'on aura BO. H*n* :: B*d*. H*b* ; donc *n*C. OC :: B*d*. H*b* ; donc *n*C × H*b* = OC × B*d*, ou $\frac{n\text{C} \times \text{H}b}{2} = \frac{\text{OC} \times \text{B}d}{2}$; c'est donc à dire que le Triangle CH*n* = le Triangle BOC ; & par conséquent chacun de ces Triangles étant la seiziéme partie de leurs Parallèlogrammes respectifs, il s'ensuit que *le Rectangle des Axes circonscrit aux hyperboles opposées, est toujours égal au Parallèlogramme de deux Diamètres conjugués quelconques, circonscrit aux mêmes hyperboles.* C. Q. F. T. & D.

* 105. PROB. Trouver la surface de l'hyperbole HAP, ou de sa moitié HA*L*. (fig. 83.).

RÉSOL. Comme on n'a point encore de méthode rigoureuse, pour résoudre ce Problême, on y procédera par approximation. Pour cela, après avoir tiré au Sommet A la Tangente *e*S, égale au second Axe GD de cette Hyperbole, on mènera l'Asymptote C*b* ; & l'on cherchera l'Aire du Trapése A*ebl* ; après quoi, si l'on tire des Lignes *b*H, 22, 77 &c. parallèles à la Tangente A*e*, & assez proches l'une de l'autre, l'espace A*eb*H se trouvera divisé en plusieurs portions *b*H 22, 22 77, &c, lesquelles ne seront pas sensiblement différentes de petits Trapéses. On évaluera sépa-

rément chacun de ces Trapéſes, & leur ſomme donnera, à très-peu près, la ſurface de l'eſpace *AebH*. On ôtera ce dernier eſpace du Trapéſe *Aebl*, & il reſtera évidemment l'Aire de la demi-hyperbole *HAl*; donc, &c.

* 106. LEMME *préparatoire à la cubature de l'hyperboloïde* (fig. 85.) Si, après avoir tracé deux Cercles concentriques, l'on tire le Diamètre *qV*; qu'au Point *g*, où ce Diamètre coupe la circonférence du petit Cercle, l'on élève la Perpendiculaire *gS* juſqu'à la rencontre de la grande circonférence; je dis que *la couronne circulaire*, c'eſt-à-dire, *l'eſpace compris entre les deux circonférences concentriques, ſera égale au Cercle décrit avec le rayon gS, qui eſt évidemment moyen proportionel entre la ſomme qg des rayons des Cercles concentriques, & la différence Vg de ces rayons.*

DÉM. Soit $Vm = R$; $gm = r$; ainſi $qg = R + r$, & $Vg = R - r$; ſoit encore *A* la circonférence du grand Cercle; *a*, celle du petit; donc l'Aire du grand ſera $\frac{AR}{2}$, & celle du petit $= \frac{ar}{2}$. De plus, ſi l'on appelle *s* la circonférence du rayon *gS*, & *y* ce rayon, l'on aura $\frac{sy}{2}$ pour l'Aire de ſon Cercle. Cela ſuppoſé, il eſt clair que la couronne circulaire eſt égale au grand Cercle moins le petit; c'eſt-à-dire que cette couronne $= \frac{AR}{2} - \frac{ar}{2}$. Il faut donc démontrer que $\frac{AR}{2} - \frac{ar}{2} = \frac{sy}{2}$, ou que $AR - ar = sy$.

Or remarquez 1°. que, par la nature du Cercle, $\overline{gS}^2 = qg \times Vg$, ou que $yy = R + r \times R - r = RR - rr$.

2°. Les Cercles étant entr'eux comme les quarrés de leurs rayons, $\frac{AR}{2}, \frac{ar}{2} :: RR. rr$, ou $AR. ar :: RR. rr$; donc (en ſouſtrayant) $AR - ar. ar :: RR - rr. rr$. Mais (art. 1.) $RR - rr = yy$; donc $AR - ar. ar :: yy. rr$. Or, les quarrés des rayons *y*, *r*, étant entr'eux comme les Aires de leurs Cercles, $yy. rr :: \frac{sy}{2}. \frac{sr}{2} :: sy. sr$; ainſi $yy. rr :: sy. sr$; & par conſéquent $AR - ar. ar :: sy. ar$. Donc, puiſque $ar = ar$, il faut que $AR - ar = sy$. C. Q. F. D.

* 107. PROB. Trouver la ſolidité de l'*hyperboloïde*. (fig. 83.)

RÉSOL. Soit *HAP* l'hyperbole génératrice du Solide pro-

posé ; C*b*, C*d*, ſes Aſymptotes ; *e*S la Tangente au Sommet A de cette Courbe, laquelle eſt toujours égale au ſecond Axe GD (conſt. du n°. 42.). Imaginons maintenant qu'après avoir diviſé l'Axe A*l* en un très-grand nombre de parties égales, l'on ait tiré par les Points de diviſion des parallèles à la Tangente AS ; pour avoir des parallèlogrammes circonſcrits au Trapèſe A*ld*S, ainſi qu'à la demi-hyperbole A*l*P, comme on l'a éxécuté lorſqu'il s'eſt agi de la ſolidité du Paraboloïde & de celle de l'Ellipſoïde. Si nous concevons alors que cette figure, ainſi appareillée, faſſe une circonvolution au tour de ſon Axe A*l*, il eſt évident que le Trapèſe A*ld*S engendrera un cône tronqué, & chacun de ſes Parallèlogrammes circonſcrits, tel que *fm*, engendrera un Cylindre circonſcrit à ce cône tronqué. Pareillement, la demi-hyperbole A*l*P engendrera un *hyperboloïde*, & chacun de ſes Parallèlogrammes circonſcrits, tel que *mn*, engendrera un Cylindre circonſcrit à l'hyperboloïde. Or nous avons démontré pluſieurs fois, aux n°. 68 & 69 de la Parabole, & 68 & 77 de l'Ellipſe, que la ſomme des Cylindres circonſcrits au cône tronqué n'étoit pas différente de la ſolidité de ce cône, & que celle des circonſcrits à l'hyperboloïde, pouvoit être priſe pour l'hyperboloïde même. Donc, ſi nous pouvons déterminer la différence de la ſomme des Cylindres circonſcrits au cône tronqué, à la ſomme des Cylindres circonſcrits à l'hyperboloïde, nous aurons évidemment la différence de ces deux Solides ; &, comme on ſçait évaluer le cône tronqué, nous aurons par là un moyen de connoître la ſolidité de l'*hyperboloïde*.

Soit donc G le Cylindre engendré par la circonvolution du Parallèlogramme *fm* ; P le Cylindre engendré par la circonvolution du Parallèlogramme *mn* ; le Cercle du rayon *m*V = S ; celui du rayon *mg* = C ; le Cercle de AS = T. Il eſt clair que le Cylindre G = S × A*m*, & que le Cylindre P = C × A*m* ; donc G — P = S — C × A*m* (K). Remarquez maintenant que les rayons *m*V, *mg*,

engendrent des Cercles S, C, concentriques ; & qu'ainſi la différence S — C de ces Cercles, ou la couronne compriſe entre leurs circonférences, eſt égale au Cercle, dont le rayon eſt moyen proportionel entre la ſomme qg & la différence Vg de leurs rayons (106) ; mais la Ligne AS eſt ce rayon moyen proportionel ; car (Art. 1. du n°. 42) $qg \times Vg = \overline{AS}^2$; donc qg. AS :: AS. Vg. par conſéquent le Cercle de AS, c'eſt-à-dire T = S — C. Ainſi, en mettant dans l'équation K, le Cercle T en la place de S — C, elle déviendra G — P = T × Am = le Cylindre engendré par la circonvolution du Parallélogramme mS ; & il en ſera ainſi de chacun des Cylindres circonſcrits au cône tronqué, comparé à chacun des circonſcrits à l'hyperboloïde. Par conſéquent la différence de la ſomme des circonſcrits au cône tronqué, à la ſomme des circonſcrits à l'hyperboloïde, c'eſt-à-dire, la différence du cône tronqué à l'hyperboloïde, eſt égale à la ſomme des Cylindres T × Am, engendrés par la circonvolution du Rectangle lS. Or cette dernière ſomme eſt égale au Cylindre entier, engendré par la circonvolution du Rectangle lS au tour de l'Axe Al. Ainſi la différence du cône tronqué à l'hyperboloïde eſt le Cylindre engendré par le Rectangle lS. Donc, *pour avoir la ſolidité de l'hyperboloïde, il faut commencer par déterminer celle du Cône tronqué, engendré par la circonvolution du Trapèſe AldS, & en ôter le cylindre engendré par la circonvolution du Rectangle lS autour de l'Axe Al.* C. Q. F. T & D.

Des Hyperboles conjuguées.

* 108. SI l'on prend ſur l'hyperbole PBT (fig. 86.) tant de Points P, M, B, &c. que l'on voudra ; & que de ces Points l'on tire parallèlement à l'Aſymptote CL, les Lignes Pop, Mem, Bfg, &c. qui coupent l'autre Aſymptote Co, de manière que op = Po, em = Me, fg = Bf, &c.

que l'on faſſe une même opération ſur l'autre branche BT, par rapport à l'Aſymptote CL ; & que l'on agiſſe de même ſur l'hyperbole oppoſée xAd, par rapport aux mêmes Aſymptotes, alors en faiſant paſſer une Ligne par les extrémités p, m, g, &c. dans l'Angle oCl, & une ſemblable Ligne dans ſon oppoſé au Sommet LCr, il en naîtra deux hyperboles oppoſées pgS, HGh, qui ſeront *conjuguées* aux deux hyperboles oppoſées PBT, xAd, dont les Axes ſont AB, Gg. Et ces deux nouvelles hyperboles auront les mêmes Aſymptotes & les mêmes Axes que les deux premières ; excepté que le premier Axe des premières, deviendra le ſecond Axe dans les *conjuguées*, & réciproquement.

DÉM. 1°. Par la conſt. $em = Me$; ainſi $em \times eC = Me \times eC = Bf \times fC = \overline{Bf}^2$ (54), parce que la Courbe PBT eſt une hyperbole (ſupp.) ; donc $em \times eC = Bf \times fC$; or $Bf = fg$ (conſt.) ; ainſi $em \times eC = fg \times fC = \overline{fg}^2$.

Par la même raiſon $op \times oC = \overline{fg}^2$, &c. Or, quand cela arrive, les Points p, m, g, ſont à une hyperbole (55) : la Courbe $pmgS$ eſt donc une hyperbole, ainſi que ſon oppoſée HGh, que l'on ſuppoſe conſtruite de la même manière dans l'Angle oppoſé LCr.

2°. Puiſque dans l'hyperbole PBT, $Me > Po$ (45), on aura dans l'hyperbole $pmgS$, $em > op$: donc cette dernière hyperbole s'approche de plus en plus de la Ligne Co ; donc la Ligne Co eſt une de ſes Aſymptotes (47), comme elle l'eſt de PBT. Et l'on prouvera de même que Cl eſt Aſymptote de l'hyperbole $pmgS$.

3°. La propriété du Sommet d'une hyperbole étant telle (54) qu'une Ligne tirée de ce Point parallèlement à une de ſes Aſymptotes & terminée par l'autre, eſt égale à la portion de cette autre Aſymptote, compriſe entre le Sommet de l'Angle des Aſymptotes & le Point de rencontre, il eſt clair que la Ligne fg ayant cette propriété, ſon extrémité g eſt le Sommet de l'hyperbole $pmgS$; par conſéquent GCg en eſt le premier Axe.

4°. Élevant au Point *g*, ſur ce premier Axe GC*g*, une Perpendiculaire *bga* terminée par les Aſymptotes, on voit ſans difficulté que dans le Triangle *yba*, la Ligne *ba* étant double de BC, elle ſera égale à BA. De plus *bg* = BC = CA = *ga*; donc *bg* = *ga*; ainſi *ba* eſt une Tangente au Sommet (61 & 63). Or la Tangente au Sommet de l'hyperbole & terminée par les Aſymptotes, eſt égale au ſecond Axe de cette Courbe (conſt. du n°. 42. & 47); donc, puiſque *ba* = BA, & que la Ligne BA paſſe par le Sommet de l'Angle des Aſymptotes, où elle eſt diviſée en deux parties égales, & perpendiculaire au premier Axe GC*g*, il eſt évident que BA eſt le ſecond Axe de l'hyperbole *pmg*S, ainſi que de ſon oppoſée HG*h*. Et c'eſt tout C. Q. F. D.

109. REMARQ. Les hyperboles *pmg*S, HG*h*, ſont dites *conjuguées* aux hyperboles PBT, *x*A*d*; parce que ces hyperboles ſont des fonctions ſemblables, les unes par rapport aux autres: vû que les Hyperboles PBT, *x*A*d*, engendrent ou peuvent engendrer les hyperboles *pmg*S, HG*h*, & réciproquement.

* 110. COR. I. Tirons d'un Point quelconque M de l'hyperbole MBT, un premier Diamètre MC*d*; &, après avoir mené M*em* parallèlement à l'Aſymptote L*l*, tirons du Point *m* un premier Diamètre *m*C*h* à ſa *conjuguée pmg*S, & il arrivera que ce premier Diamètre *m*C*h*, ſera le ſecond Diamètre *conjugué* au premier Diamètre MC*d* de l'hyperbole MBT.

Car, (54) pour avoir le Diamètre *conjugué* au Diamètre MC*d*, il faut du Point M tirer la Ligne M*em* parallèlement à l'Aſymptote L*l*; faire M*e* = *em*, & tirer *m*C*h* en ſorte que C*h* = *m*C. Or, c'eſt préciſément tout ce qui ſe trouve pratiqué dans ce cas; puiſque M*e* = *em* eſt parallèle à L*l* (conſt.); & que *m*C = C*h*, parce que *mh* eſt un des premiers Diamètres des hyperboles oppoſées *pmg*S, HG*h*.

* 111. COR. II. On voit par là que les hyperboles *conjuguées pmg*S, HG*h*, paſſent par les extrêmités de tous les ſeconds Diamètres des hyperboles PBT, *x*A*d*; & réciproquement, &c.

* 112. REMARQ. La propriété qu'ont les hyperboles

conjuguées pmgS, HG*h*, de passer par les extrémités de tous les seconds Diamètres des hyperboles PBT, *x*A*d*, a fait soupçonner à quelques Géomètres, & il y en a même qui ont dit expressément, que les quatre hyperboles de la fig. 86. n'étoient que *quatre quartiers* de la même Courbe; c'est-à-dire que ces quatre hyperboles ne composoient ensemble qu'une seule & même Courbe. Et ils se sont confirmés dans cette idée, en se croyant permis de supposer qu'à une très-grande distance de leur Sommet, ces hyperboles se joignent à leurs Asymptotes; quoiqu'il soit rigoureusement démontré que ces Lignes ne pourront jamais absolument se rencontrer (47).

Mais, quand on veut s'assurer que plusieurs Points de portions de Courbes, appartiennent à une seule & même Courbe, il n'y a pas d'autre moyen que de voir, si chacun de ses Points rapportés de la même manière à une même Ligne, présente toujours la même équation. Donc, puisque les Points des *conjuguées*, rapportés perpendiculairement au premier Axe d'une hyperbole, ne donnent pas aux mêmes Points de cet Axe, la même équation que les Points de l'hyperbole dont elles sont *conjuguées*, comme cela est évident, il faut nécessairement conclure que les *conjuguées* d'une hyperbole, ne sont pas des portions ou des quartiers de cette hyperbole.

Ainsi, quand il seroit vrai que les Asymptotes des hyperboles opposées deviendroient enfin Tangentes de ces Courbes, ainsi que de leurs conjuguées (ce dont j'ai fait voir l'impossibilité), on n'auroit pas droit d'en conclure que ce sont quatre quartiers de la même Courbe.

USAGE *de l'Hyperbole dans la Dioptrique, soit pour la construction des Verres ardens, soit pour celle des Lunettes.*

113. Je suppose ici tous les préliminaires de Dioptrique, expliqués aux n°. 110, 111, 112, 113 de l'Ellipse, où il s'est agi d'appliquer cette Courbe aux mêmes usages, que je me propose en cet endroit-ci.

Soit donc l'hyperbole PBZ (fig. 87.); le Point F ſon *Foyer*; *f* celui de ſon oppoſée, & ſon premier Axe AB, qui ſoit à la diſtance des Foyers F*f*, dans le *rapport de la réfraction* du verre dans l'Air, c'eſt-à-dire, à peu près, comme 2 eſt à 3; [*a*] je dis que tous les rayons TM parallèles à l'Axe AB (en paſſant de l'Air dans le ſolide de verre, engendré par la circonvolution de l'hyperbole PBZ au tour de ſon Axe, dont PZ eſt une double Ordonnée) ſeront néceſſairement, à la ſortie de ce verre en M, détournés de leur direction MS dans une Ligne telle que M*f*, qui ſe dirige au Foyer *f* de ſon *oppoſée*.

Dém. Elevons au Point M. une Perpendiculaire GL à la Courbe, ou à ſa Tangente en ce Point; faiſons TM = M*f*; du Point M avec le rayon M*f* ou TM, décrivons une portion de Cercle *f*RTQ; & des Points T, *f*, abbaiſſons les Perpendiculaires TL, *f*G, ſur GL. Cette conſtruction ſuppoſée, il eſt clair que GML eſt l'Axe de réfraction, que TL eſt le Sinus de l'Angle d'inclinaiſon TML, & que *f*G eſt le Sinus de l'Angle GM*f*. Ainſi, en faiſant

---

[*a*] Pour avoir des hyperboles oppoſées qui ayent cette condition, & de plus dont le Sommet B de l'une ſoit à une diſtance donnée du Foyer *f* de l'autre, par exemple, à 20 pieds, on augmentera cette longueur de $\frac{1}{5}$, c'eſt-à-dire ici de 4 pieds. Donnant donc 24 pieds à la Ligne F*f*, on la diviſera en 6 parties, dont chacune contiendra 4 pieds. On portera une de ces ſixiémes parties, de F en B & de *f* en A. Ainſi il reſtera 4 ſixiémes pour AB; & alors F*f*. AB :: $\frac{6}{6}$. $\frac{4}{6}$ :: 6. 4 :: 3. 2; donc 1°. AB. F*f* :: 2. 3. Après quoi conſtruiſant ces hyperboles ſuivant le n°. 101. il eſt clair que la diſtance des Foyers F*f*, étant de 24 pieds, & BF de 4 (conſt.), B*f* en contiendra préciſément 20. Et cette règle eſt générale; parce qu'en augmentant de $\frac{1}{5}$ la longueur donnée, elle contiendra alors $\frac{6}{5}$ ou $1 + \frac{1}{5}$; en donnant donc ce $\frac{1}{5}$ à FB, on lui aura donné la ſixiéme partie de $\frac{6}{5}$; ainſi il reſtera toujours $\frac{1}{5}$ ou 1, c'eſt-à-dire, la longueur donnée pour B*f*. CQF. D.

voir que TL. *f*G : : 2. 3, (qui eſt le rapport du Sinus de l'Angle d'inclinaiſon à celui de l'Angle de réfraction, quand un rayon de lumière paſſe du verre dans l'Air) on aura démontré que *f*G eſt le Sinus de l'Angle de réfraction, que GM*f* eſt cet Angle de réfraction ; & que par conſéquent le rayon TM, au ſortir du verre en M, doit ſe détourner dans la Ligne M*f*, qui paſſe par le Foyer *f*.

Or 1°. le rayon TM, étant parallèle à l'Axe AB & tombant perpendiculairement ſur le plan PZ, n'éprouvera aucune réfraction à ſon paſſage de l'Air dans le verre ; il rencontrera donc en M la concavité de la Courbe, dans une direction parallèle à AB ; mais, au ſortir du verre dans l'Air, il quittera ſa direction MS, ſuivant la Loi de la réfraction, pour s'écarter de la Perpendiculaire GML à la Courbe.

2°. Je dis qu'en prenant la route M*f*, ce rayon ſera plié préciſément comme il doit l'être, pour faire que le Sinus TL de l'Angle d'inclinaiſon TML, ſoit au Sinus *f*G de l'Angle de réfraction GM*f* : : 2. 3. Car (96) TL. *f*G : : AB. F*f* ; or (conſt.) AB. F*f* : : 2. 3 ; donc TL. *f*G : : 2. 3. Ainſi TL étant le Sinus de l'Angle d'inclinaiſon, il faut que *f*G ſoit néceſſairement celui de l'Angle de réfraction, & par conſéquent que GM*f* ſoit cet Angle de réfraction. Donc, en prenant la direction M*f*, le rayon TM, ou tout autre ſemblable, eſt détourné comme il doit l'être, pour ſuivre la loi de la réfraction. Par conſéquent tous les rayons parallèles à l'Axe AB, après avoir traverſé un verre de cette forme, conſtruit ſuivant les conditions que nous avons ſuppoſées, vont tous ſe réünir au Foyer *f*. L'on a donc par cet artifice un excellent verre brûlant.

184. Réciproquement, les rayons d'un corps lumineux, placé au Foyer *f* dans l'Air, ſeront rendus parallèles à l'Axe AB, après avoir traverſé le Solide de verre PBZ. Car le rayon *f*M rencontrant la convéxité du verre PBZ, quittera ſon prolongement MV & s'approchera de la Perpendiculaire GML ; de manière que l'on aura, ſuivant la loi de la réfraction du rayon qui paſſe de l'Air dans le verre, *f*G.

TL

TL : : 3. 1, ou TL. fG : : 1. 3 ; mais (const.) AB. Ff : : 2. 3. donc TL. fG : : AB. Ff. mais, quand cela arrive, le rayon réfracté MT eſt parallèle à l'Axe AB (97).

115. Cor. I. Si l'on ſuppoſe au contraire, que des rayons viennent du côté de f rencontrer la convéxité de l'hyperbole PBZ (fig. 88). parallèlement à ſon Axe, je dis qu'en tirant OT perpendiculairement, à 1 ou 3 Lignes de diſtance du Sommet B, & les Lignes OP, TZ, parallèlement à ce même Axe, pour faire tourner enſuite la figure OPBZT au tour de Bf, il en naîtra un Solide qui aura la propriété, s'il eſt de verre, de faire que tous ces rayons parallèles deviendront divergens, après l'avoir traverſé, comme s'ils partoient tous du Foyer f de l'hyperbole oppoſée à la génératrice PBZ.

Dém. Reprenons la fig. 87, & ſuppoſons que SM parallèle à Bf, paſſe du verre dans l'Air au Point M ; il eſt certain, ſuivant la loi de la réfraction, que ce rayon quittera au Point M ſa direction MT, & s'écartera de la Perpendiculaire ML, de la même manière qu'il s'en eſt écarté, en venant du côté de T vers S : or, en venant de T vers S, pour paſſer dans l'Air au Point M, il a fait l'Angle ou l'écartement SMf ; donc, en revenant du ſein du verre du côté de S vers T, il fera en paſſant dans l'Air, au Point M, l'Angle ou l'écartement TMV égal à l'Angle SMf. Mais $TMf + SMf$ = deux Angles droits ; donc $TMf + TMV$ = auſſi deux Angles droits. Et par conſéquent (n°. 43. *Inſt. T.* 1.) MV eſt dans la même Ligne que Mf, laquelle paſſe par le Foyer f. Ainſi les rayons SM, qui rencontrent la convéxité de ce verre hyperbolique, après l'avoir traverſé parallèlement à ſon Axe, deviendront Divergens, à leur ſortie dans l'Air au Point M, comme s'ils partoient du Foyer f ; donc (fig. 88.) le rayon SM, paſſant de l'Air dans le verre, & rencontrant perpendiculairement, à l'inſtant de ſon paſſage en L, la ſurface plane OT de ce verre, n'y ſouffrira aucune réfraction ; il conſervera donc ſon même parallèliſme depuis L juſqu'en M, où rencontrant la convéxité de l'hyperboloïde, dans une direc-

tion parallèle à l'Axe de ce ſolide, il divergera à ſa ſortie dans l'Air, comme s'il rayonnoit directement du Foyer *f*; & ainſi de tous les autres rayons. C. Q. F. D.

116. COR. II. Par conſéquent, ſi un œil K (fig. 89.) eſt diſpoſé de manière qu'il apperçoive bien diſtinctement le Point F, & non pas le Point A plus proche; ainſi qu'il arrive aux vieillards, qui diſtinguent mieux les objets éloignés à une certaine diſtance, que ceux qui ſont plus proches; pour lui faire voir le Point A comme il faut, il n'y aura qu'à mettre entre lui & le Point A un verre PBZL, engendré par deux hyperboles, dont le Foyer de l'hyperbole CDE, oppoſée à la génératrice PLZ tournée vers l'œil, ſoit le Point F, & le Foyer de l'hyperbole ONR, oppoſée à la génératrice PBZ, qui regarde l'objet, ſoit en A [*a*].

DÉM. Les rayons *Ax*, *Ay*, &c. venant du Foyer A rencontrer la convéxité de l'hyperbole PBZ, ſeront, à leur entrée dans le verre, rendus parallèles à la Ligne FK, ſur laquelle ſont les Axes des hyperboles ſuppoſées (114): ainſi leurs réfractés *xs*, *yt*, tomberont ſur la convéxité de l'hyperbole PLZ, parallèlement à ſon Axe: mais, quand des rayons tombent avec cette diſpoſition, ſur la convéxité d'un verre hyperbolique, ils deviennent divergens, à leurs ſorties *s*, *t*, &c. de ce verre dans l'Air, comme s'ils venoient tous du Foyer F de l'hyperbole CDE, oppoſée à la génératrice PLZ (115); & par conſéquent ces rayons trouveront l'œil diſpoſé comme il doit l'être, pour appercevoir avec diſtinction le Point A: puiſqu'alors ce Point affectera l'œil préciſément, comme ſi ce Point étoit en F, qui eſt la diſtance où nous ſuppoſons que l'œil diſtingue les objets avec le plus de facilité. C. Q. F. D.

117. COR. III. Au contraire, ſi l'œil K pouvant voir commodément le Point A plus proche, n'étoit pas en état d'appercevoir avec diſtinction le Point F plus éloigné, il faudroit que l'hyperbole PLZ, tournée vers l'œil, eût le

[*a*] On a enſeigné à la note du n°. 113, comment ces Hyperboles pouvoient être conſtruites.

Point A pour le Foyer de ſon oppoſée ; & que le Point F fût le Foyer de l'hyperbole oppoſée à la génératrice PBZ, tournée du côté de l'objet [a] ; & alors le verre PBZL diſpoſeroit les rayons émanés de F, à entrer dans l'œil K, comme s'ils partoient du Point A plus proche, où l'on ſuppoſe qu'un objet placé ſeroit vû très-diſtinctement par l'œil propoſé. Par conſéquent, cet œil acquerroit, moyennant un pareil inſtrument, la capacité de diſtinguer un objet à une diſtance beaucoup plus grande, qu'il ne le pourroit naturellement ou ſans aucun ſecours artificiel.

Dém. Raiſonnez préciſément comme au n°. 116. Puiſque les rayons Fx, Fy, envoyez du Foyer F de l'hyperbole oppoſée à la génératrice PBZ, ſeront rendus parallèles après avoir rencontré la convéxité de cette Courbe (114) ; ils pénètreront donc la ſubſtance de ce verre, dans une direction *xs*, *yt*, parallèle à ſon Axe ; ainſi ils tomberont parallèles ſur la convéxité de l'hyperbole PLZ, & ſeront par là rendus divergens, à la ſortie de ce verre dans l'Air, comme s'ils partoient du Foyer A de l'hyperbole oppoſée à la génératrice PLZ (115). Par conſéquent, ces rayons entrans dans l'œil de la même manière que s'ils venoient de A, trouveront cet organe diſpoſé comme il doit l'être, pour appercevoir avec diſtinction le Point F. Car alors il n'y aura pour lui, à cet égard, aucune différence entre le Point A & le Point F ; en ſuppoſant toujours que la lumière ne ſoit pas trop affoiblie par l'éloignement. C. Q. F. D.

Obſervation importante ſur la réduction de cette théorie en Pratique.

L'uſage de tailler ſphériquement les verres de Lunettes a pourtant prévalu dans la pratique. Par la ſeule raiſon, ſans doute, que l'éxécution en eſt plus aiſée ; il ſeroit donc très-déſirable, les Artiſtes de profeſſion ne pouvant guères devenir Sçavans, que les Sçavans travaillaſſent

[a] Quoique la fig. 89. ne convienne qu'au n°. 116. il eſt aiſé de l'appliquer au n°. 117. en ſuppoſant que l'objective PBZ devienne l'oculaire PLZ, & que l'oculaire PLZ devienne l'objective PBZ.

quelquefois à devenir Artiſtes. La perfection des Arts de génie ſuivroit alors de fort près les Découvertes théoriques, qui en ſont le flambeau. Que ne doit pas l'Horlogerie au noble Géomètre M. *Huyghens?* Auſſi n'y avoit-il pas moins d'induſtrie dans ſes mains que d'invention dans ſa tête. Du tems de M. *Deſcartes*, c'eſt-à-dire, vers les années 1627. & 1628. M. *Mydorge* ſon ami, bon Mathématicien, & *qui avoit la main auſſi sûre & auſſi délicate que l'eſprit ſubtil*, après avoir tracé lui-même les figures de Mathématique qui devoient ſervir de modèle, fit faire des verres Paraboliques, Hyperboliques, Ovales & Elliptiques, qui réuſſirent merveilleuſement.

Encouragé par ce ſuccès, M. *Deſcartes* » devint lui-» même en très-peu de tems un grand Maître dans l'art de » tailler les verres; & convaincu que l'induſtrie des Mathé-» maticiens ſe trouve ſouvent inutile par la faute des Ou-» vriers, dont l'adreſſe ne répond pas toujours à l'eſprit » des Auteurs qui les font travailler, il s'appliqua parti-» culièrement à former la main de quelques Tourneurs, » qu'il trouva les plus experts & les plus diſpoſés à ce tra-» vail..... Il eut le bonheur de rencontrer ſingulièrement » ce qu'il cherchoit, dans *Ferrier*, faiſeur d'inſtrumens de » Mathématiques à Paris..... Cet ouvrier n'étoit pas un » ſimple Artiſan qui ne ſçût remuer que la main; il poſſè-» doit encore la théorie de ſa profeſſion, & ſçavoit l'Optique » & la Méchanique auſſi sûrement qu'un Profeſſeur du Col-» lège Royal; n'étant pas même ignorant dans le reſte des » Mathématiques. L'un des inſtrumens les plus excellens » que M. *Deſcartes* lui fit faire, fut une Lunette nouvelle » compoſée de verres hyperboliques, à laquelle il ne s'étoit » encore rien vû de ſemblable. M. de *Ville-Breſſieux* qui » l'avoit vûe, & qui de plus avoit été préſent à ſa fabrique, » aſſuroit que par ſon moyen l'on découvroit diſtinctement » les feuilles des plantes à trois lieues de diſtance. «

Mais, dans ces commencemens où il s'agiſſoit d'établir un Art tout nouveau, M. *Deſcartes* croioit ſa préſence abſolument néceſſaire, pour diriger la main des Ouvriers ou

des Tourneurs, & leur donner de nouvelles inſtructions, à meſure qu'ils avanceroient ou qu'ils manqueroient. C'eſt pourquoi il ne put approuver les ſervices, que ſes amis lui rendirent en 1637. & 1638 auprès du Cardinal de Richelieu, à l'occaſion de ſes belles inventions de Dioptrique. On étoit parvenu à faire goûter au Cardinal les propoſitions qu'on lui avoit faites, de travailler à des Lunettes ſur les règles que M. *Deſcartes* en donne dans ſa Dioptrique. Ces nouvelles étant parvenues au Philoſophe François, alors en Hollande, il écrivit à ſes amis de *Paris* pour les remercier de leurs bons offices; mais il leur montra de l'éloignement pour l'éxécution de ce projet. Il craignoit qu'on ne réuſſit mal en ſon abſence; & qu'on ne rejettât enſuite ſur lui-même la faute des ouvriers [a].

Les choſes tournèrent apparemment comme l'avoit prévu M. *Deſcartes*; car on ne voit point, dans le reſte de ſa Vie, qu'il revienne à l'art de tailler les verres de Lunette. Il ne paroît pas même que, depuis ce tems juſqu'à nos jours, l'on ait fait de grandes tentatives pour perfectionner cet Art ſelon ſes principes; quoique l'on dût attendre les plus grands ſuccès d'une théorie ſi rigoureuſement démontrée. Effectivement je trouve, dans le Mercure de France Septembre 1749. qu'un Anglois vient de réduire très-heureuſement en pratique la doctrine des Lunettes par M. *Deſcartes*. Cela fait partie d'une Lettre écrite à M. *Folkes*, Préſident de la Société Royale de Londres. Voici quels en ſont les termes, » M. *Short*, de la Société Royale de *Londres*, a » placé en 1747. dans le jardin de l'Hôtel de *Malborough*, » un grand Téleſcope de 12 pieds & à réflexion, dont le » miroir eſt de métal. *Il produit des effets ſupérieurs à tout ce* » *que l'on a vû juſqu'à préſent en ce genre.* Ce qui eſt dû prin- » cipalement à l'attention que M. *Short* a toûjours eue de » donner une figure *parabolique* au grand miroir, & une » *Elliptique* au petit, toutes les fois qu'il a percé le grand » miroir ſuivant la méthode de *Grégory*. «

[a] Voy. ſur tout ceci *Baillet*, Vie de *Deſcartes*.

La construction des miroirs ou des verres coniques n'eſt donc pas auſſi impraticable que Meſſieurs *Dechales* & *Wolf* l'inſinuent dans leur Dioptrique ; & nos grands Artiſtes François devroient bien, à force de courage & d'induſtrie, ſe remettre en poſſeſſion d'un honneur, que M. *Deſcartes* acquit autrefois ſi juſtement à la *France*.

* 118. USAGE *de l'Hyperboloïde dans la Catoptrique* (fig. 90). L'hyperboloïde engendré par la circonvolution d'une hyperbole ſur ſon Axe, peut être *convexe* & *concave* à la fois. Or ſoit que l'on conſidére la *convéxité* de ce ſolide, ſoit qu'on en regarde la *concavité*, on trouvera qu'il a la propriété de réünir des rayons de lumière, en les faiſant rejaillir de deſſus ſa ſurface.

DÉM. 1°. Soit donc l'hyperbole RR, génératrice d'un hyperboloïde convéxo-concave, dont on ſuppoſe que des rayons de lumière DR, viennent rencontrer la convéxité ou la courbure hyperbolique extérieure, dans une direction au Foyer F de ce conoïde ; je dis que tous ces rayons iront ſe réünir au Foyer *f* de l'hyperboloïde oppoſé. Car, en tirant en un Point quelconque R la Tangente MR*l*, & traçant le prolongement RF du rayon DR, rappellons-nous qu'il a été démontré (93) que l'Angle *f*R*l* = *l*RF ; mais *l*RF = DRM ; donc *f*R*l* = DRM : le rayon DR ſe réfléchira donc dans la Ligne R*f*, qui va à l'autre Foyer *f* ; & par conſéquent tous les rayons DR, qui rencontreront la convéxité de cette hyperboloïde, dans une direction à ſon Foyer F, iront tous ſe réünir au Foyer *f* de l'hyperboloïde oppoſé. Donc, en ſupprimant ce dernier ſolide, on aura le Point *f* en l'Air, où les rayons DR auront la liberté de ſe raſſembler.

2°. Suppoſons préſentement que des rayons PR, dirigés au Foyer *f*, viennent frapper contre la ſurface concave ou la courbure intérieure hyperbolique de l'hyperboloïde propoſé ; il arrivera encore que les rayons PR, réfléchis à la rencontre de cette ſurface, ſe raſſembleront tous au Foyer F du conoïde RR. Car (en menant comme ci-deſſus, la Tangente MR*l*, la Ligne RF, & le prolongement R*f* du rayon

PR) on remarquera aiſément que l'Angle PRM = *f*RI = IRF (93), donc PRM = IRF; le rayon PR ſe réfléchira donc au Foyer F, & ainſi des autres. C. Q. F. D.

USAGE *de l'Hyperbole pour la Triſſection de l'Angle.*

* 119. PROB. *préparatoire.* Deux Lignes BA, BC, étant données pour les Aſymptotes d'une hyperbole, avec un de ſes Points D, conſtruire cette Courbe (fig. 91.).

RÉSOL. Par le Point donné D, tirez un grand nombre de Lignes droites ADM, FDN, GDC, &c. terminées par les deux côtés de l'Angle ABC. Faites ML = AD; NO = FD; CR = GD, &c. & je dis que les Points L, O, R, &c. ainſi déterminés, ſeront à une hyperbole, qui aura pour Aſymptotes les Lignes BA, BC.

DÉM. 1°. Que la Courbe ainſi engendrée ſoit une *hyperbole*, cela eſt clair par le n°. 59. 2°. Après avoir tiré ſur BA la Perpendiculaire DH, on voit que AD > FD, & FD > GD. Donc, puiſque (conſt.) ML = AD, FD = NO, & GD = CR, l'on aura ML > NO, & NO > CR, &c. Par conſéquent, à meſure que les Points L, O, R, &c. s'éloignent du Sommet B, ils s'approchent continuellement de la droite BC; d'autant plus que les Angles M, N, C, &c. vont toujours en diminuant. Cependant aucun Point de cette Courbe ne coincidera avec la droite BC; car, quelqu'inclinée que ſoit, par exemple, la Ligne GDC, ſon Point R ſe trouvera toujours au-deſſous de BC (par la conſt.) Ainſi BC eſt Aſymptote de la branche KLOR (47); & ſi, à quelque Point L de cette branche, l'on fait la même conſtruction qu'au Point D, on aura l'autre branche KDS de cette Courbe, dont BA ſera l'Aſymptote. Ce que l'on démontrera de la même manière que l'on s'eſt conduit par rapport à BC. Donc, &c. C. Q. F. T. & D.

* 120. PROB. Soit maintenant l'Angle CO*b*, (fig. 92.), que l'on propoſe de diviſer en deux parties égales.

RÉSOL. On commencera par décrire un Cercle du centre O, avec le rayon OC ou O*b*, pour avoir l'Arc *b*AC meſure

de l'Angle proposé, & en même-tems la corde *b*C de cet Arc, laquelle sera donnée de grandeur; on abbaissera le rayon ODA perpendiculairement sur *b*C; on prolongera ce rayon du côté de L; & faisant OL = $\frac{OP}{2}$, on élèvera sur LA la Perpendiculaire LM = $\frac{DC}{2}$ ou $\frac{Db}{2}$. Après quoi traçant, parallèlement à LA, la Ligne MV, laquelle divise DC en deux parties égales au Point G; parce que DG = LM; & que LM = $\frac{DC}{2}$ (const.); on décrira par le Point donné O l'hyperbole OTZ, qui ait pour Asymptotes les droites ML, MV (119); & cette hyperbole coupera nécessairement l'Arc *b*AC en quelque Point T; vû que cette Courbe s'étendant à l'infini, est toujours renfermée dans l'Angle LMV des Asymptotes (47). Maintenant, si du Sommet O de l'Angle donné on tire le rayon OT, l'Angle COT sera le tiers de l'Angle proposé CO*b*.

DÉM. Faites DI = DS, & tirez le rayon OIQ; ce qui donnera évidemment l'Angle *b*OQ = COT: ainsi il reste à démontrer que l'Angle TOQ = COT. Or il est évident 1°. qu'en tirant la corde TQ, elle sera parallèle à *b*C, & par conséquent coupée en deux parties égales au Point N par la Perpendiculaire ODA sur *b*C.

2°. Menez présentement, du Point d'interfection T, la Ligne TK parallèlement à l'Asymptote MV, & par le Sommet O le Diamètre HB parallèlement à l'autre Asymptote ML; & vous aurez OL × LM = TK × KM (56) = $\overline{TP+PK}$ ou $\overline{TP+OL}$ × P*d* (à cause que PK = OL, & KM = P*d*) = O*d* × OL (56) = $\overline{OP+Pd}$ × OL; donc $\overline{TP+OL}$ × P*d* = $\overline{OP+Pd}$ × OL. Or $\overline{TP+OL}$ × P*d* = TP × P*d* + OL × P*d*, & $\overline{OP+Pd}$ × OL = OP × OL + P*d* × OL. Donc TP × P*d* = OP × OL; ainsi TP. OP :: OL. P*d*: mais il est évident que les Triangles TPO, ODS, sont semblables; donc TP. OP :: OD. DS; par conséquent OL. P*d* :: OD. DS: mais OD = 2OL (const.); donc DS = 2P*d* ou 2rG; ainsi D*r*, qui vaut DS + S*r*, est = 2P*d* + S*r*; mais D*r* = TN, & TQ = 2TN (const.); donc TQ

$= 2Dr$; & par conſéquent, puiſque $Dr = 2Pd + Sr$, TQ eſt $= 4Pd + 2Sr$.

3°. Maintenant $DG = Dr + rG = Dr + Pd$. Or, on vient de voir que $Dr = 2Pd + Sr$; donc $DG = 3Pd + Sr = CG$ (car $DG = CG$ (art. 1°.)); ainſi $CG + rG + Sr$, ou (conſt.) $DG + Pd + Sr = 4Pd + 2Sr$; c'eſt-à-dire que $CS = 4Pd + 2Sr$. Mais nous avons vû (art. 2.) que $TQ = 4Pd + 2Sr$; donc $CS = TQ$.

4°. Mais, dans les Triangles ſemblables OIS, OQT, OI. OQ :: IS. TQ, ou OI. OC :: IS. CS (parce que $OC = OQ$, & que $CS = TQ$ (art. 3.)); donc l'Angle COI ou COQ eſt coupé en deux parties égales par la Ligne OST (291. *Inſt. T.* 2.); ainſi l'Angle $COT = TOQ$; &, comme on a déja vû que l'Angle $COT = bOQ$ (art. 1°.), il s'enſuit que les trois Angles COT, TOQ, bOQ, ſont égaux, & qu'ainſi l'Angle COB eſt diviſé en trois parties égales, C, Q, F, T. & D.

* 121 USAGE *de l'Hyperbole pour la duplication du Cube* (fig. 93.). Soit AB le côté du Cube connu, & BC le double de AB. On ſçait que pour avoir le côté du Cube cherché, il faut (398. *Inſt. T.* 2.) trouver deux moyennes proportionelles entre AB & BC; & la première de ces deux proportionelles, ſera le côté du Cube que l'on demande.

RÉSOL. Faiſons un Rectangle BD des deux Lignes AB, BC; & prenant les côtés BA, BC, indéfiniment prolongés, pour les Aſymptotes de l'hyperbole à décrire par le Point D, traçons cette Courbe (119); & circonſcrivons un Cercle BSC au Rectangle BD. Je dis 1°. que ce Cercle coupera néceſſairement l'hyperbole en un autre Point S.

2°. Qu'en abbaiſſant de ce Point la Perpendiculaire ST ſur BC, les deux Lignes BT, TS, ſeront les deux moyennes proportionelles cherchées.

DÉM. *de la première partie.* Rappellons-nous que le Sommet de l'hyperbole, doit ſe trouver dans la corde BR (qui diviſe en deux parties égales l'Angle ABC des Aſymptotes) & être l'extrêmité du premier demi-Axe de cette Courbe (Art. 3. n°. 57.). Or ce premier demi-Axe, qui

doit se trouver sur la corde BR, doit aussi être nécessairement plus court que cette corde.

1°. Pour s'en convaincre, soit ce demi-Axe = A ; AB = CD = b ; BC = AD = $2b$. On sçait (Art. 2. du n°. 57) que CD × BC = $2bb$ est la puissance de l'hyperbole, & ainsi $4bb$ est le double de cette puissance ; donc le dernier demi-Axe A = $\sqrt{4bb}$ = $2b$ (art. 3. du n°. 57.) ; & par conséquent $A^2 = 4bb$.

Cherchons présentement la valeur de $\overline{BR}^2$. L'Angle ABO étant demi-droit (const.), l'Angle AOB le sera aussi ; donc AO = AB = b ; ainsi OD = AD − AO = $2b - b = b$; & $\overline{OD}^2 = bb$. Remarquons maintenant que l'Angle BRD étant droit, & l'Angle ROD = AOB demi-droit, l'Angle RDO est aussi demi-droit ; donc RD = OR. Ainsi $\overline{OD}^2 = 2\overline{RD}^2$, & $\overline{RD}^2 = \frac{\overline{OD}^2}{2} = \frac{bb}{2}$. Mais $\overline{BR}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{RD}^2$, & $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 4bb + bb = 5bb$. Donc $\overline{BR}^2 = 5bb - \frac{bb}{2} = \frac{9bb}{2}$.

Or nous avons vû (art. 1.) que $A^2 = 4bb$; donc, pour démontrer que A^2 est plus petit que $\overline{BR}^2$, il s'agit de faire voir que $4bb < \frac{9bb}{2}$, ou que $8bb$, double de $4bb$, est plus petit que $9bb$, double de $\frac{9bb}{2}$; mais cela est visible ; donc $A^2 < \overline{BR}^2$, ou A < BR. Le premier demi-Axe de cette hyperbole est donc plus petit que la corde BR, sur laquelle il doit être pris. Ainsi le Sommet de cette hyperbole, qui est l'extrêmité de ce demi-Axe, est placé au-dedans du Cercle. Or, puisque l'hyperbole qui passe par D, entre dans le Cercle, elle en ressortira par quelque Point S ; & par conséquent elle coupera le Cercle en deux Points. C. Q. F. 1°. D.

Dém. de la seconde partie. Il reste donc à démontrer que AB. BT :: BT. TS :: TS. BC.

Pour cela, joignons les deux Points D, S, par la corde DS, que nous prolongerons de part & d'autre, jusqu'à la rencontre des Asymptotes aux Points H, L; &, après avoir tiré la Perpendiculaire SK, ainsi que la corde BS, remarquons que, par la propriété de l'hyperbole, établie n°. 58, DL = SH; donc les Triangles DCL, HKS, étant semblables, on aura HK = DC = AB, & CL = KS = BT; donc TL = BC. Ceci supposé, il est clair que l'Angle BSL est droit, ainsi que BSH. Donc le Triangle Rectangle HSB donne HK. KS :: KS. KB ou TS; c'est-à-dire, AB. BT :: BT. TS; & du Triangle-Rectangle BSL, on tire BT. TS :: TS. TL ou BC; par conséquent l'on a enfin AB. BT :: BT. TS :: TS. BC. C. Q. F. D.

Cor. Puis donc que les deux Lignes BT, TS, sont moyennes proportionelles entre AB & BC, l'on aura $\overline{AB}$. $\overline{BT}^3$ :: AB. BC (257. *Inst. T.* 2.); or BC est double de AB (supp.); donc la Cube de BT est double du Cube de AB. Et c'est tout C. Q. F. T. & D.

*Dissertation sur les Miroirs d'*Archimède *&* de Proclus.

122. J'ai différé jusqu'ici à parler de ces Miroirs, si fameux chez les Anciens & si contestés parmi les Modernes. Les Lecteurs de cet Ouvrage en sont sans doute les juges naturels; mais, pour avoir ce droit sur l'opinion que je vais établir, il ne faut pas moins qu'une connoissance générale de tout ce qui précède. Du tems d'*Archimède* & de *Proclus* les *Sections Coniques* étoient connues. Il a été démontré qu'elles avoient des *Foyers* soit par réflexion, soit par réfraction. Ces deux célèbres Mathématiciens n'en auroient ils pas fait usage? Nous avons deux moyens d'en juger, l'Histoire & la Géométrie. Par l'Histoire, nous apprendrons la Tradition, & la Géométrie nous la fera apprécier.

Tzetzès dit formellement [*a*] qu'*Archimède* avec un miroir héxagone, & pluſieurs autres petits miroirs quadrangulaires, mit le feu à quelques Vaiſſeaux de la Flotte de *Marcellus*, Général des Romains qui aſſiégeoient *Syracuſe* en *Sicile*; quoique ces Vaiſſeaux fuſſent éloignés des murs de cette Ville à la Portée de l'Arc; c'eſt-à-dire, à une diſtance d'environ 200 pas. *Diodore* dit que cette Diſtance étoit de trois ſtades; & *Cluverius* aſſure qu'elle étoit de 3000 Pas. Mais le P. *Kircher*, paſſant à *Syracuſe* en 1636, examina cette queſtion avec un très-grand ſoin, & il trouva que les Auteurs faiſoient cet eſpace beaucoup plus grand grand qu'il ne l'étoit effectivement.

Indépendamment de cet éxamen, la choſe parle aſſez de ſoi-même. Il eſt conſtant, par l'hiſtoire, que les Vaiſſeaux de *Marcellus* s'approchoient de fort près des murs de la ville, que l'on appelloit anciennement *Acradine* [*b*]; & que les flots de la Mer en battoient le pied; puiſqu'*Archimède* pouvoit, par le moyen d'une eſpèce de gruë armée de chaînes, enlever en l'Air les Vaiſſeaux des Romains, & les précipiter tout à coup dans les eaux. Par conſéquent la diſtance des Vaiſſeaux de *Marcellus*, à l'endroit où *Archimède* faiſoit jouer ſes machines, ne pouvoit pas être fort conſidérable. Auſſi le P. *Kircher*, après l'avoir bien meſurée, ne la trouva que d'environ 30 pas, ou de 150 pieds en ſuppoſant le Pas Géométrique de 5 pieds [*c*].

Cependant, malgré l'obſervation du P. *Kircher*, il reſte toujours des doutes ſûr l'eſpèce de miroirs cauſtiques, dont *Archimède* a pu faire uſage dans cette occaſion [*d*]. Auroit-il porté l'incendie dans les Vaiſſeaux de *Marcellus*,

---

[*a*] Hiſt. 35. Chiliad. 2. Mais *Plutarque*, qui décrit avec une ſorte de complaiſance, les admirables inventions d'*Archiméde* contre les Romains, ne dit pas un mot de ces Miroirs dans la Vie de *Marcellus*.

[*b*] C'étoit une des quatre Villes qui compoſoient *Syracuſe*.

[*c*] *Kircher* p. 875. & 876. *Artis magnæ lucis & umbræ, in-fol.* imprimée à Rome en 1646.

[*d*] Nous voulons bien ſuppoſer ici ce fait; quoique l'on puiſſe très-raiſonnablement le conteſter.

en y faiſant tomber le Foyer d'un miroir parabolique ? Il auroit fallu pour cela que le Paramètre de la Parabole génératrice eut eu quatre fois 150 pieds, ou 600 pieds ; puiſque la diſtance du *Foyer* d'une Parabole au Sommet de cette Courbe, eſt toujours égale au quart de ſon Paramètre ; ainſi qu'il a été démontré (n°. 78 & 81 de la Parabole). Mais la conſtruction d'une Courbe auſſi énorme, eſt elle réductible en pratique ? il ne paroît pas que les Défenſeurs de cette opinion y ayent beaucoup compté.

C'eſt pourquoi ils ont imaginé d'autres combinaiſons, toujours fondées ſur les propriétés de la Parabole, & moyennant leſquelles on pourroit, ſelon eux, porter l'incendie à une diſtance incomparablement plus grande, que tout ce que l'on rapporte d'*Archimède*. Reprenons la fig. 38 du n°. 160 de la Parabole, où l'on a fait voir que l'on pouvoit convertir un Foyer en Ligne brûlante indéfinie, c'eſt-à-dire, faire régner le Foyer d'une Parabole, tout le long d'une Ligne droite indéfinie. L'étendue d'une pareille Ligne étant illimitée, il ſemble qu'il n'y a point de diſtance, où l'on ne puiſſe, avec des miroirs Paraboliques, mettre en feu des matières combuſtibles. Mais, comme nous avons répondu à cette objection au n°. cité, on y verra que cette reſſource eſt tout-à-fait impuiſſante.

Il ne paroît donc pas qu'*Archimède* ait pu brûler les Vaiſſeaux de *Marcellus* avec des miroirs Paraboliques ; & l'on concevra aiſément que des miroirs *Elliptiques* & *hyperboliques*, ſont encore moins propres à la production de cet effet.

123. Examinons préſentement, ſi cela a été poſſible avec des miroirs ſphériques concaves. Suppoſons que l'Arc ou le Segment SAB de 120^{d}. (fig. 94.) ait engendré par ſa circonvolution au tour de l'Axe AM, un miroir ſphérique concave ; & qu'un rayon de lumière QS vienne frapper, parallèlement à l'Axe, l'extrémité S de ce Segment ; ſi l'on tire le rayon CS & la corde SA, on verra clairement, après avoir mené au Point S la Tangente PG, que l'Angle $r = x$; parce que l'Angle CSP étant droit, ainſi que CSG, ſi l'on ôte du premier l'Angle d'incidence QSP, & du ſecond

l'Angle de réflexion ASG = QSP, il restera $r = x$; mais $r = n$ son alterne (const.), & $n = 60^d$. (const.); donc $x = 60^d$. par conséquent l'Angle CAS = aussi 60^d. & le Triangle CSA est équilatéral; ainsi le rayon QS se réfléchit dans une Ligne SA, qui va rencontrer l'Axe au Sommet A.

Soit maintenant un autre rayon de lumière LD, parallèle à l'Axe AM; mais qui en soit plus près que le rayon QS; il est certain, en tirant DC & la Ligne de réflexion Df, que l'Angle b d'incidence = y Angle de réflexion; or $b = f$CD son alterne (const.); donc l'Angle fCD = y; ainsi Cf = Df; par conséquent, dans le Triangle CfD, les Angles fCD, y, n'ayant pas 60^d. (const.), l'Angle CfD aura plus de 60^d. donc CD > Cf ou Df, mais CD = CA; donc CA > Cf; c'est-à-dire, que la Ligne de réflexion Df rencontre l'Axe en un Point f au-dessous du Sommet A.

124. Corol. D'où l'on voit déja que le miroir sphérique concave ne réfléchit pas, en un seul & même Point, les rayons de lumière parallèles à son Axe, & qu'à proprement parler, cette espèce de miroir n'a point de *Foyer*. Cela n'empêche pas néanmoins qu'il n'ait la vertu de brûler; parce que les rayons réfléchis, tels que Df, occupent ensemble un si petit espace sur l'Axe AM, qu'ils y sont extraordinairement condensés; & qu'ainsi ils y agissent avec assez de force, pour brûler des matières combustibles: mais il faut faire voir que la théorie s'accorde parfaitement avec les effets.

125. Pourvu que le Segment BAS ait moins que 120^d. les rayons réfléchis Df rencontreront toujours l'Axe au-dessous du Sommet A; de manière cependant qu'aucun d'eux ne descendra jusqu'à la moitié O du rayon de ce miroir: car l'on aura toujours Cf + fD > CD ou CA ou Cf + fA; donc fD > fA. Or on a vu (123) que fD = Cf; ainsi Cf > fA; le Point f ne descend donc pas jusqu'au milieu O du rayon CA.

126. Cependant plus les rayons de lumière parallèles à l'Axe, seront près de cet Axe, plus les Points de rencontre des réfléchis & de l'Axe seront proches du Point O. Car, si

l'on trace le rayon de lumière HK parallèlement à l'Axe MA, ſon réfléchi K*i*, & le rayon CK du miroir, on verra, comme ci-deſſus, que l'Angle de réfléxion CK*i* étant égal à l'Angle d'incidence CKH = *i*CK ſon alterne, on verra, dis-je, que *i*C = *i*K. On a donc ici deux Triangles iſoſcéles C*f*D, C*i*K, dont les baſes CD, CK, ſont égales; par conſéquent le Triangle C*f*D, dont les Angles ſur la baſe CD ſont plus grands que les Angles ſur la baſe CK du Triangle C*i*K (conſt.), aura ſes côtés C*f*, *f*D, plus grands que les côtés C*i*, *i*K, du Triangle C*i*K; & par conſéquent C*f* > C*i*. Ainſi le rayon réfléchi K*i* rencontre l'Axe en un Point *i*, plus près de O que le réfléchi D*f*.

127. Prenons maintenant un Segment de 18^d^. (fig. 95.), par exemple DAS, dont le centre ſoit C; & voyons quelle partie de l'Axe peuvent occuper tous les Points, formés par la rencontre des rayons réfléchis avec cet Axe. Soit donc un rayon de lumière LD parallèle à lAxe AC, qui diviſe le Segment DAS en deux parties égales au Point A; que D*f* ſoit le réfléchi; & le Point O le milieu du rayon CA.

Nous venons de faire voir (126), que tous les rayons de lumière, parallèles à l'Axe AC, qui viendroient rencontrer le Segment DAS en des Points ſitués entre les extrêmités D, S, de ce Segment, ſeroient tels que leurs réfléchis croiſeroient l'Axe, en des Points plus proches du milieu O que le Point *f*; ſans cependant pouvoir jamais atteindre à ce milieu (125). Par conſéquent tous les rayons réfléchis ſur l'Axe, ſeront compris dans un eſpace, lequel commençant en *f* & s'étendant vers C ſera plus petit que *f*O. Il s'agit donc de déterminer quelle partie *f*O eſt du rayon CA.

Abbaiſſons pour cela la Perpendiculaire *fx* du Point *f* ſur le rayon CD; &, comme C*f* = *f*D (123), il eſt clair que *fx* tombe ſur le milieu de CD; ainſi C*x* = *x*D. Maintenant, ſi dans le Triangle-Rectangle C*fx* nous prenons *f*C pour le Sinus total, en décrivant du Point *f* par C l'Arc CG, meſure de l'Angle C*fx* ou C*f*G, il eſt évident que la

Perpendiculaire Cx eſt le Sinus de l'Angle Cfx. Or l'Angle Cxf étant droit & l'Angle fCx de 9^d. (conſt.), l'Angle Cfx eſt de 81^d. Donc, en ſuppoſant que le Sinus total fC ſoit diviſé en 10000000 de parties, on verra par les Tables des Sinus, que le Sinus Cx de l'Angle Cfx de 81^d. contient 9876883 de ces parties; & que par conſéquent CD ou CA, double de Cx, en vaudra 19753766: or $CO = Cx$; donc $fC - CO$, c'eſt-à-dire, $fO = fC - Cx =$ 10000000 — 9876883 = 123117. Ce qui ſignifie que fO contient 123117 des parties, dont le rayon CA en vaut 19753766.

Ainſi, pour connoître le rapport de fO à CA, il n'y a qu'à diviſer 19753766 par 123117; & l'on trouvera un peu plus de 160; c'eſt-à-dire que l'eſpace fO eſt un peu plus petit que la cent ſoixantième partie du rayon CA. Par conſéquent, ſi l'on ſuppoſe que ce rayon ait 3 pieds, ou 36 pouces, ou 12 fois 36 pouces = 432 Lignes, fO ſera un peu plus petit que la cent ſoixantième partie de 432 Lignes, laquelle vaut 2 Lignes & $\frac{7}{10}$ de Ligne.

Donc tous les rayons parallèles à l'Axe d'un Segment de 18^d. étant réfléchis ſur cet Axe, y occuperont un eſpace qui n'aura pas 2 lignes & $\frac{7}{10}$ de large; tous ces rayons y ſeront donc extrêmement condenſés, & pourront par conſéquent y enflammer des corps combuſtibles, ainſi que l'expérience le démontre.

128. Cependant il ne me paroît pas poſſible, qu'*Archimède* ait mis le feu aux Vaiſſeaux de *Marcellus*, avec des miroirs ſphérico-concaves. Il auroit fallu que ſes miroirs euſſent eu, pour le moins, un rayon de 300 pieds. Car leurs diſtances aux Vaiſſeaux des Romains étant ſuppoſées de 150 pieds (122); afin que les Foyers de ces miroirs euſſent pu s'étendre à une telle diſtance, leur rayon générateur auroit dû avoir au moins le double de 150 pieds ou 300 pieds; puiſque leur Foyer ne s'éloigne pas de leur Sommet, à une diſtance tout-à-fait égale à la moitié de leur rayon générateur (125. Or, pour peu qu'on ſe ſoit appliqué à la conſtruction effective des miroirs, on verra aiſément

lisément que celle d'un miroir de 300 pieds de rayon est fort au-dessus de l'art des hommes.

129. Je ne voudrois pas nier pourtant qu'*Archiméde* ait pû mettre le feu à la Flotte de *Marcellus* avec des miroirs caustiques, s'il est vrai que *Proclus* ait éxécuté un artifice tout-à-fait semblable, sept ou huit cents ans après la mort de cet admirable Mathématicien. Or c'est ce que rapporte en termes très-clairs & très-précis l'Historien *Zonaras* [*a*] : il dit qu'*Anastase* assiégé dans *Constantinople* par *Vitalien*, fut redevable de la retraite de ce dernier, principalement au génie de *Proclus*, homme très-célèbre par ses connoissances en Philosophie & en Mécanique. Ce Mathématicien sçut tellement construire & disposer des miroirs d'airain, qu'il porta le feu dans la Flotte de *Vitalien*, dont les Vaisseaux & les Matelots furent brûlés comme par la foudre.

130. Remarq. Je ne crois pas devoir m'étendre sur les miroirs sphérico-convèxes ; parce qu'ils dispersent les rayons, au lieu de les réünir. Ainsi, après tout ce que l'on a vu sur l'efficacité des miroirs concaves, il reste à examiner si *Archiméde* & *Proclus* ont pu se servir de miroirs *plans*, pour produire des effets aussi merveilleux, que ceux dont l'histoire fait mention. Le P. *Kircher*, Jésuite, homme de génie, & d'une très-vaste érudition dans les Sciences secrétes, a interrogé l'expérience pour la solution de ce Problême. Ce qu'il dit là-dessus est très-formel, &, de peur que l'on ne m'accuse d'exagération, je vais citer ses propres paroles, & en mettre la figure sous les yeux. Je les tire du dixième Livre de son grand Ouvrage, qui a pour titre, *Ars magna lucis & umbræ*, imprimé à *Rome* en 1646 aux dépens d'*Herman-Scheus*, p. 887 & 888. Voici donc comment il propose sa question.

Problema IV.

131. *Machinam ex speculis planis construere ad centum pedes*

[*a*] Historiarum suarum tom. 3.

& ustrà urentem : c'eſt-à-dire, » conſtruire une machine de » miroirs plans, moyennant laquelle on puiſſe brûler à la » diſtance de plus de 100 pieds.

Après avoir fait remarquer qu'à force de faire tomber au même endroit, un grand nombre de rayons réfléchis par des miroirs plans, l'on parviendra enfin à y porter la chaleur à un très-haut dégré, il continue en ces termes : *Ego certè hujus rei in quinque ſpeculis experimentum ſumpſi ; & prima quidem lux à luce directâ diverſum calorem habebat ; duplata lux notabile caloris augmentum jam ſuſcipiebat ; triplata calorem ignis præferebat ; quadruplicata calorem utcumque adhuc tolerabilem præſtabat ; quintuplicata penè intolerabilem. Undè certò & indubitate concluſi, multiplicatis ſpeculis planis, & eâ ratione collocatis, ut omnia reflexam ſolis lucem in unum ſpatium cogant, futurum ut non tantùm majorem uſtionis effectum, quam qualibet uſtoria Parabolica, hyperbolica, Elliptica præſtent ; ſed & in multo majus ſpatium radioſam lucem reflectant ; quemadmodum me in quinque ſpeculis ad ſpatium centum & ampliùs pedum experientia docuit.* Ce qui ſignifie, » je pro- » teſte que j'en ai fait l'expérience avec cinq miroirs ; & » j'ai obſervé que la lumière réfléchie du premier miroir, » jointe à la lumière directe du Soleil, avoit une chaleur » différente de celle de la ſimple lumière directe ; la cha- » leur s'accrût conſidérablement, quand j'y joignis la » lumière réfléchie du ſecond miroir ; en y mettant celle » du troiſième, la chaleur approchoit de celle que l'on reſ- » ſent, en ſe chauffant à un feu modéré ; on pouvoit encore » la ſupporter, lorſqu'elle fut quadruplée ; mais à la réunion » de la lumière réfléchie du cinquième miroir, il n'étoit » preſque plus poſſible d'y tenir. »

» Je conclus donc, ſans aucun doute, qu'en multipliant » des miroirs plans, diſpoſés de manière qu'ils renvoyaſſent » dans un ſeul & même eſpace, la lumière du Soleil qui » tomberoit ſur eux, je conclus, dis-je, qu'ils produi- » roient non-ſeulement un plus grand effet, que des miroirs » quelconques Paraboliques, Hyperboliques & Elliptiques ; » mais encore que les lumières réünies, réfléchies de deſſus

» ces miroirs plans, occuperoient un plus grand eſpace ;
» ainſi que je m'en ſuis convaincu par le moyen de cinq mi-
» roirs, avec leſquels j'ai excité une chaleur conſidérable
» à la diſtance de plus 100 pieds ....

Si quis igitur mille, V. gr. ſpecula diſponeret, ut omnia in unum punctum reflecterent .... non eſt dubium, quin tanta ſuperficierum lucidarum conſtipatio idem præſtaret, & multò efficacius, quam parabolica conſtipatio propè focum; ut vel hinc machinamentum PROCLI, *quo naves byſantinas combuſſiſſe Zonaras refert, hujus modi ſpeculorum diſpoſitione effectum omninò credam ...* » Si quelqu'un arrangeoit donc un millier de » miroirs, par éxemple, enſorte qu'ils réfléchiſſent tous » enſemble les rayons du Soleil en un ſeul & même Point.... » il n'eſt pas douteux qu'une auſſi grande condenſa- » tion de ſurfaces lumineuſes ne fît le même effet, & même » avec beaucoup plus d'efficacité, que la réünion des » rayons au Foyer ou près du Foyer d'une Parabole. C'eſt » pourquoi je ne balance point à croire ce que *Zonaras* » rapporte de *Proclus*, quand il dit que ce Mathématicien » diſpoſa des miroirs d'Airain avec tant d'artifice, qu'il ſçut » porter l'incendie dans la flotte de *Vitalien*. Il n'étoit be- » ſoin pour cela que d'une diſpoſition ſemblable à celle que » j'ai décrite.

Sint enim ſpecula plana A, B, C, D, E; *Sol* G; *murus* F (fig. 96.); *quæ ita diſponantur ut ſolis radii ex ſingulis ſpeculis reflexi coeant in Puncto* F : *certum eſt, & experientiâ conſtat, uti lucem, ita & calorem in* F *coactum, quintuplo majorem eſſe & intenſiorem, quam lucem & calorem unico ſpeculo illuc reflexum; ita ut in* F *manus vix, ob intenſum calorem, firmari poſſit : ſi itaque quinque ſpecula tantum poſſunt, quid non centum aut mille ſpecula hoc ingenio diſpoſita? Certum eſt calorem tam intenſum fore, ut omnia adurere poſſit & in cineres redigere; cum Focus hic major ſit, & luce conſtipatior, quam in ullis aliis Parabolicis ſpeculis. Rogo hîc obnixè catoptricos Mathematicos, ut hujus rei experimentum ſummâ diligentiâ ſuſcipiant; & invenient id, quod ſupra quoque inſinuavi, nullum aliud machinamentum catopticum eſſe, quod & majorem in urendo vim, &*

in majorem diſtantiam obtineat : » car ſoient les miroirs Plans » A, B, C, D, E; le Soleil G; la muraille F, diſpoſés de » manière que les rayons du Soleil, réfléchis par chaque » miroir, ſe réüniſſent en F; il eſt certain, & l'expérience » le démontre, que la lumière, ainſi que la chaleur raſſem- » blée en F, eſt cinq fois plus grande ou plus forte, que » celle qui ſeroit réfléchie en ce même endroit par un ſeul » miroir. Elle y eſt portée à un tel degré, que l'on a de la » peine à y tenir la main.

» Puis donc que cinq miroirs ont tant de vertu, que ne » feroit-on pas avec cent ou mille de ces machines, diſpo- » ſées dans un ordre convenable ? Il eſt certain qu'elles pro- » duiroient une chaleur ſi véhémente, qu'elles pourroient » enflammer tous les corps combuſtibles & les réduire en » cendres; vû que le Foyer de ces miroirs eſt plus grand, & » ſa lumière plus condenſée, que dans quelques miroirs pa- » raboliques que ce ſoit.

» Je prie donc inſtamment les Mathématiciens, qui s'ap- » pliquent à la Catoptrique, d'en faire l'expérience avec le » plus d'éxactitude & de diligence qu'il leur ſera poſſible; » & ils trouveront, ce que j'ai déja inſinué ci-deſſus, qu'au- » cune autre Machine catoptrique n'eſt capable de brûler » les corps avec plus de force, ni de porter le feu à une plus » grande diſtance. «

Il y a quelques années que M. de *Buffon*, Intendant du Jardin du Roi, & Membre de l'Académie des Sciences, lut publiquement un Mémoire, où cette doctrine me parut diſcutée très-ſçavamment. Je crus y remarquer une ſuite de vûes ſi neuves, que je ne balançai point alors à lui attribuer toute la gloire dûe à une première invention. Mais, comme il n'a point encore rendu publique ſa Doctrine des miroirs cauſtiques, & que je n'oſerois m'en rapporter ici à ma mémoire, je ſupprimerai l'analyſe que je m'étois propoſé d'en donner. On y auroit vû l'accompliſſement de la prédiction du P. *Kircher*; c'eſt-à-dire que non-ſeulement les miroirs d'*Archiméde* & de *Proclus* ſont poſſibles, mais que l'on peut voir aujourd'hui des effets, pour le moins auſſi puiſſans que tout ce que l'on

raconte de ces fameux Mathématiciens. La machine de M. de *Buffon*, composée de miroirs plans, pouvant porter l'incendie à plus de 200 pieds, comme l'ont démontré les expériences publiques, que ce célèbre Académicien en a faites plusieurs fois au Jardin du Roi.

De la Cissoïde.

AVERTISSEMENT. *Les quatre Courbes suivantes n'ayant été inventées par les Anciens que pour résoudre les fameux Problêmes de la Duplication du Cube, de la Trissection de l'Angle, & de la Quadrature du Cercle, nous ne les considérerons ici que par rapport à ces objets; leur utilité dans les Arts n'ayant rien d'important.*

1. Soit AOBA un Cercle quelconque (fig. 97.); AB un de ses Diamètres; BK une de ses Tangentes indéfinie; AO, AO, &c. autant de cordes, que l'on en pourra mener sans confusion, dans le demi-Cercle AOB, prolongées jusqu'à la rencontre de BK. Si l'on prend sur l'une des cordes prolongées quelconques ATK, la corde AO; qu'on la porte sur la même ATK, de K en H, & que l'on fasse la même opération sur toutes les autres Lignes, telles que ALK, il en naîtra une suite de Points AHHCHH, lesquels composeront une Courbe appellée *Cissoïde* [*a*].

* 2. COROL. Il s'ensuit de cette génération 1°. que l'extrêmité C du quart de Cercle AC est à la *Cissoïde*. Car, en tirant le Diamètre CD, il sera évidemment parallèle à BK, & l'on aura AR. RB :: AC. KC. Or RB = AR, donc KC = AC. Par conséquent le Point C est à la *Cissoïde* (1).

2°, BK est *Asymptote* de la Courbe ACH. Prenons, pour le voir, deux Lignes quelconques ALK, ACK, immédiatement voisines; nous aurons (const.) AO = KH, & AC

[*a*] Cette Courbe, qui a plus de 1400 ans d'ancienneté, est de l'invention de *Dioclès*, cité par *Eutocius*, plus ancien que *Pappus*; aussi l'appelle-t-on communément la *Cissoïde de Dioclès*. Voy. *Vossius de Script. Mathem.*

= KC (art. 1.); mais AO > AC; donc KH > KC. Or, si KC & KH étoient également inclinées, KC étant < KH, le Point C de la *Ciſſoïde* ſeroit plus près de BK, que ſon Point H dans la Ligne KLH; donc, à plus forte raiſon, puiſque KCA eſt plus inclinée que KLA, la *Ciſſoïde* s'approchera plus près de BK au Point C, qu'au Point H ſur la Ligne KLA. Et, en prenant ASK qui ſuit immédiatement ACK, on prouvera de même que le Point H de la Courbe ſur ASK, eſt plus proche de BK que le Point C; car AO étant = KH (conſt.), & AC = KC, comme AO eſt alors < AC; KH ſera < KC; donc, par la même raiſon que ci-deſſus, H plus près de BK que le Point C, &c. ainſi, à meſure que la *Ciſſoïde* s'éloigne de ſon origine A, elle s'approche continuellement de la Tangente BK. Ces deux Lignes néanmoins ne pourront jamais ſe rencontrer; vû que les AK devant toujours être inclinées au Diamètre AB (conſt.), aucun des Points O ne ſe confondra jamais avec A. Les cordes AO auront donc toujours quelque longueur, & par conſéquent les KH auſſi; donc H ne coincidera jamais avec K; ainſi BK eſt *Aſymptote* de la *Ciſſoïde*.

3°. Les KO ſont toujours égaux aux AH correſpondans; car, par éxemple, KLH étant = ALO (conſt.), ſi l'on ôte OH de part & d'autre, il reſtera KO = AH.

4°. Les HO ſont toujours coupées en deux parties égales par CD; c'eſt-à-dire, par éxemple, que HL = OL. Rappellons-nous pour cela que AR étant = RB, AL = KL ou AH + HL = KO + OL; mais AH = KO (art. 3.); donc HL = OL.

* 3. PROP. I. D'un Point quelconque H de la Ciſſoïde menons HM parallèle à BK; & du Point O correſpondant tirons, par le centre R du Cercle générateur, le rayon OR, prolongé juſqu'à la rencontre de HM; je dis que le Point M de rencontre ſera préciſément ſur la circonférence du Cercle générateur.

DÉM. HM étant parallèle à CD (conſt.), OL. HL :: OR. RM; mais OL = HL (art. 4. du n°. 2.); donc OR = RM; ainſi RM eſt un rayon; le Point M de rencontre eſt

donc ſur la circonférence du Cercle. C. Q. F. D.

* 4. PROP. II. Les quatre Lignes BF, FM, FA, FH, ſont en proportion continue; c'eſt-à-dire que BF. FM :: FM. FA :: FA. FH. Ce qui arrivera toujours, de quelque Point H de la Ciſſoïde que l'on tire la parallèle HM.

DÉM. Après avoir mené BM & AM, remarquons que l'Angle ORB = ARM; donc l'Arc OB = l'Arc AM. Ainſi l'Angle OAB ou HAF = l'Angle ABM, & les Triangles AFH, BFM, ſont ſemblables entr'eux, ainſi qu'au Triangle AFM. Donc BF. FM :: FM. FA :: FA. FH. C. Q. F. D.

* 5. USAGE *de la Ciſſoïde pour la Duplication du Cube.* Nous avons dit bien des fois que ce Problème ſeroit réſolu, ſi l'on pouvoit trouver deux moyennes proportionelles entre deux Lignes données, telles que CR & RT. Or c'eſt à quoi peut ſervir la Ciſſoïde. (fig. 97.)

RÉSOL. Avec la plus grande des deux Lignes données CR décrivez un Cercle, dont le Diamètre CD ſoit coupé perpendiculairement par le Diamètre AB. par le moyen de ce Cercle conſtruiſez une *Ciſſoïde* (1), dont l'origine ſoit en A. Portez enſuite la plus petite des deux Lignes RT, du centre R en T ſur CR. du Point B par T menez BT, juſqu'à ce qu'elle coupe la Ciſſoïde en quelque Point H. Du Point A par H tirez la corde AO; laquelle coupant CR en quelque Point L, donnera RL pour la première des deux moyennes proportionelles cherchées. Et par conſéquent le Problème ſera réſolu, la première donnant la ſeconde.

DÉM. Menez HM parallèlement à CD; & vous aurez BF. FM :: FM. FA :: FA. FH (4). Donc 1°. $\overline{BF}^{3}$. $\overline{FM}^{3}$ :: BF. FH (257. *Inſt. T.* 2.). 2°. BF. FM :: FA. FH. Or (conſt.) FA. FH :: AR ou CR. RL; ainſi BF. FM :: CR. RL; donc $\overline{BF}^{3}$. $\overline{FM}^{3}$ :: $\overline{CR}^{3}$. $\overline{RL}^{3}$. Par conſéquent (art. 1.) $\overline{CR}^{3}$. $\overline{RL}^{3}$ :: BF. FH. Mais (conſt.) BF. FH :: BR ou CR. RT; donc $\overline{CR}^{3}$. $\overline{RL}^{3}$ :: CR. RT (A). Ce qui démontre que RL eſt la première des deux moyennes proportionelles cherchées. Car appellant la ſeconde *y*, & faiſant CR. RL :: RL. *y*. :: *y*.

RT, (d'où l'on déterminera y) on aura $\overline{CR}.\overline{RL} :: CR.RT$. La proportion A peut donc être déduite d'une proportion continue à quatre termes, dont RL eſt la première moyenne proportionelle entre les deux Lignes données CR, RT. C. Q. F. D.

De la Conchoïde.

1. D'UN Point P quelconque (fig. 98.) abbaiſſons, ſur l'indéfinie KM, la Perpendiculaire PT. Faiſons ſon prolongemant TS d'une longueur arbitraire. Tirons enſuite du même Point P, un nombre indéfini d'obliques PA, PB, &c. PF, PG, &c. de l'un & de l'autre côté de la Perpendiculaire; enſorte que les parties de ces obliques, telles que xC, uB, rA, qui ſont au-delà de KM, ſoient toutes égales à TS; ſi l'on joint les extrêmités D, C, B, A, S, &c. de ces prolongemens, par une Ligne continue, on aura une Courbe que les Anciens ont nommée *Conchoide* [a]. Le Point fixe P en eſt le *Pôle*; S le *Sommet*; les Lignes TS, rA, uB, &c. les *rayons générateurs*.

* 2. Et il eſt aiſé de concevoir que KM en eſt l'*Aſymptote*. Car rA étant $=$ TS (conſt.), & TS moins inclinée que rA ſur KM, le Point A eſt néceſſairement plus près de KM que le Point S. Par la même raiſon B en eſt plus près que A, & ainſi de ſuite. Donc, à meſure que la *Conchoide* DSL s'éloigne de part & d'autre de ſon Sommet S, elle s'approche de KM. Mais elle ne la rencontrera jamais; puiſque (conſt.) ſes *rayons générateurs* ſont toujours des prolongemens des obliques au-delà de KM.

[a] En Latin *Conchylis*, ainſi appellée de ſa reſſemblance avec une certaine coquille de poiſſon. L'on nomme auſſi communément cette Courbe la *Conchoïde de Nicomède*, ſon inventeur. *Proclus*, Lycien, qui vivoit vers l'an 500 de J. C. fait mention de ce Géomètre. Cette Courbe eſt donc d'une ancienneté aſſez reculée. *Voſſius de Scripti. Mathem.*

* 3. Par conſéquent, quelqu'inclinée que ſoit ſur l'Aſymptote d'une *Conchoïde*, une Ligne droite dirigée à ſon Pôle, cette droite ſera néceſſairement coupée ou déterminée à être coupée par la *Conchoïde*. Car, en prolongeant cette inclinée du côté de la Courbe, elle s'éloignera toujours de ſon Aſymptote; mais la *Conchoïde* s'en approche ſans ceſſe; l'inclinée paſſera donc au-delà de la *Conchoïde*, & par conſéquent ces deux Lignes ſe couperont.

* 4. USAGE *de la Conchoïde pour la Duplication du Cube.* Il s'agit par ſon moyen de trouver deux moyennes proportionelles entre deux Lignes données. Mais, avant d'en venir à la conſtruction, il eſt bon d'être prévenu de la vérité ſuivante.

* LEMME. Si une Ligne AR (fig. 99.) eſt coupée en deux inégalement en B, & l'une de ſes parties AB coupée par le milieu en H; je dis que le quarré de RH, eſt égal au Rectangle de AR par RB, joint au quarré de HB; c'eſt-à-dire que $\overline{RH}^2 = AR \times RB + \overline{HB}^2$.

DÉM. 1°. Puiſque AH = HB (conſt.); RH = AR — AH eſt = AR — HB; donc $\overline{RH}^2 = \overline{AR}^2 - \overline{2HB \times AR} + \overline{HB}^2 = \overline{AR - 2HB \times AR} + \overline{HB}^2 =$ $RB \times AR + \overline{HB}^2$; (étant évident que AR — 2HB = AR — AB = RB); donc $\overline{RH}^2 = AR \times RB + \overline{HB}^2$.

2°. Si AE eſt coupée inégalement en D, & ſa partie AD également en F, on démontrera préciſément comme ci-deſſus, que $\overline{EF}^2 = AE \times DE + \overline{DF}^2$.

* 5. PROB. Trouver, par le moyen de la *Conchoïde*, deux moyennes proportionelles entre deux Lignes données AB, BC.

RÉSOL. Après avoir mis ces deux Lignes à Angles droits, faites-en le Rectangle BD. Par le milieu F de DA menez CF, juſqu'à ce qu'elle rencontre AB prolongée en G. Sur le milieu de AB élevez la Perpendiculaire indéfinie HP. Du Point B, avec DF ou AF, décrivez un Arc qui coupe cette

Perpendiculaire en P. Menez BP, GP, & BK parallèlement à GP. Du Point P abbaiſſez, ſur le prolongement de BK, la Perpendiculaire PT; dont vous ferez le prolongement TS = DF ou AF ou BP; enſuite du Pôle P, avec le *rayon générateur* TS, décrivez une portion SRL de Conchoïde (1), dont S ſoit le Sommet & TK l'Aſymptote; cette Courbe coupera néceſſairement le prolongement de AB en quelque Point R (3). Alors, ſi vous tirez RC juſqu'à ce qu'elle coupe AD, prolongée en E, les deux Lignes RB, DE, ſeront les deux moyennes proportionelles cherchées; c'eſt-à-dire que l'on aura BC. RB :: RB. DE :: DE. AB.

DÉM. 1°. $\overline{RH}^2 = AR \times RB + \overline{HB}^2$ (4); donc $\overline{RH}^2 + \overline{HP}^2 = AR \times RB + \overline{HB}^2 + \overline{HP}^2$ (G). Or, en menant PR, les Triangles-Rectangles PHR, PHB, donnent $\overline{RH}^2 + \overline{HP}^2 = \overline{PR}^2$, & $\overline{HB}^2 + \overline{HP}^2 = \overline{PB}^2$; donc l'équation G peut devenir $\overline{PR}^2 = AR \times RB + \overline{PB}^2$.

2°. Mais des Triangles ſemblables EDC, CBR, on tire ED. CB ou DA :: DC ou AB. BR; donc ED. $\frac{DA}{2}$ ou DF :: 2AB. BR (M). Or DF étant = AF (conſt.) & les Triangles DFC, AFG ſemblables, il eſt clair que AG = DC = AB, & qu'ainſi 2AB = BG; donc la proportion M devient ED. DF :: BG. BR :: PM. MR (parce que BM eſt parallèle à GP); ainſi ED. DF :: PM. MR. Donc ED + DF. DF :: PM + MR. MR, ou EF. DF :: PR. MR. Or, par la nature de la *Conchoïde*, MR = TS (1), & TS = DF (conſt.); donc MR = DF, & par conſéquent PR = EF, ou $\overline{PR}^2 = \overline{EF}^2$; mais on a vû (art. 1.) que $\overline{PR}^2 = AR \times RB + \overline{PB}^2$. Donc $AR \times RB + \overline{PB}^2 = \overline{EF}^2 = AE \times DE + \overline{DF}^2$ ou $\overline{PB}^2$ (art. 2. du n°. 4.); ainſi, ôtant $\overline{PB}^2$ de part & d'autre, AR × RB = AE × DE, ou RB. DE :: AE. AR :: BC. RB (à cauſe de AE paralléle à BC); donc BC. RB :: RB. DE; mais,

les Triangles CBR, EDC, étant ſemblables, BC. RB :: DE. DC. Par conſéquent enfin BC. RB :: RB. DE :: DE. DC ou AB. C. Q. F. T. & D. [a].

De la Quadratrice.

1. SOIT ABH un Angle droit (fig. 100.) accompagné de ſon quart de Cercle AH, diviſé en un très-grand nombre de parties égales AC, CL, &c. ce que l'on éxécutera géométriquement par le moyen de la *Biſſection*. Aux Points de diviſion C, L, &c. on mènera les rayons BC, BL, &c. après quoi diviſant le rayon AB dans le même nombre de parties égales que l'Arc AH, par les Points de diviſion M, O, &c. on mènera des parallèles Mx, OR, &c. à BH; & les mutuelles interſections de ces parallèles avec les rayons correſpondans, c'eſt-à-dire l'interſection x de la première Mx avec le premier rayon BC, celle de la ſeconde avec le ſecond; de la troiſiéme avec le troiſiéme, &c. compoſeront une Courbe AxRF appellée *Quadratrice* [b]; parce qu'elle a la ſingulière propriété, de faire découvrir tout d'un coup la *rectification* très-approchée de la circonférence du Cercle, & par conſéquent ſa *Quadrature*; ainſi qu'on le verra bien-tôt.

2. Telle eſt donc la propriété de cette Courbe que, ſi par un de ſes Points quelconque R, on tire un rayon BL de l'Arc générateur AH, & du même Point la Perpendiculaire RO ſur l'*Axe* AB, on aura toujours AH. LH :: AB. OB; étant évident (conſt.) que, ſi l'Arc AH contient huit

[a] On lit, au Liv. 4. fol. 56. des Collect. Mathém. de *Pappus*, que cet Auteur a fait uſage de la *Conchoïde*, pour couper un Angle en trois parties égales....

[b] Et plus particulièrement *Quadratrice de Dinoſtrate*, ſon Inventeur. Cette Courbe ne peut avoir guères moins que 1500 ans d'ancienneté. *Pappus d'Alexandrie*, qui vivoit il y a environ 1460 ans, en parle dans ſes Ouvrages, comme d'une Ligne fort connue de ſon tems, & que l'on pouvoit déja mettre au nombre des anciennes. *Pappus Collect. Mathem.* & *Voſſius Script. Mathem.*

des parties, dont il y en a ſix dans l'Arc LH, le rayon AB contient pareillement huit des parties, dont il y en a ſix Dans OB.

De même, ſi l'on tire BK & la Perpendiculaire SQ, l'on aura AH. KH :: AB. QB, par la même raiſon que ci-deſſus.

REMARQ. Cette propriété conduiroit à la *rectification* abſolue de la circonférence du Cercle, ſi l'on pouvoit déterminer le Point F, qui termine la *Baſe* BF de la *Quadratrice*, auſſi géométriquement que ſes autres Points. Ce que nous démontrerons, quand on ſera prévenu des deux Lemmes ſuivans.

4. LEMME I. Si du Sommet B d'un Angle ABH (fig. 101. Pl. X.), l'on décrit pluſieurs arcs concentriques AH, GM, DP, entre ſes côtés; & qu'on le coupe par des rayons BL, BK. Je dis 1°. que l'Arc AH eſt à l'Arc HL, comme l'Arc GM eſt à l'Arc GR. 2°. Que l'Arc AH eſt à l'Arc HK comme l'Arc DP eſt à l'Arc DV.

DÉM. 1°. Les Arcs AH, GM, étant ſemblables, AH. GM :: BH. BG; &, (à cauſe de la ſimilitude des Arcs HL, GR) BH. BG :: HL. GR (304. *Inſt. T.* 2.); donc AH. GM :: HL. GR, ou AH. HL :: GM. GR. C. Q. F. 1°. D.

2°. AH. DP :: BH. BD :: HK. DV; ainſi AH. DP :: HK. DV, ou AH. HK :: DP. DV. C. Q. F. 2°. D.

5°. LEMME II. La Tangente DS (fig. 102.) à l'Arc DV d'un Angle DBS, eſt plus grande que cet Arc.

DÉM. Faites l'Arc VT = DV, & tirez ST; il eſt clair que ST = DS. Mais DST viſiblement plus grande que DVT; donc DS, moitié de DST, plus grande que l'Arc DV, moitié de DVT.

6. USAGE *de la Quadratrice pour la rectification géométrique, très-approchée, de la circonférence du Cercle.* Suppoſant que l'on ait le Point F (fig. 101.), où la *Quadratrice* rencontre BH, je dis que l'Arc AH eſt une troiſiéme proportionelle aux deux Lignes BF, BH. C'eſt-à-dire que BF. BH :: BH. AH, ou que AH. BH :: BH. BF.

DÉM. Il éxiſte très-évidemment une troiſiéme proportionelle aux deux Lignes AH, BH; or cette troiſiéme pro-

portionelle ne peut être plus grande que BF, comme BG; ni plus petite, telle que BD; il faut donc néceſſairement conclure qu'elle eſt BF. Pour en être convaincu, 1°. du Point B décrivez l'Arc GRM; par le Point R, où il coupe la Courbe, tirez BL; abbaiſſez RO perpendiculairement ſur AB, & RC ſur BH. Cela ſuppoſé, je dis qu'il eſt abſurde que AH ſoit à BH :: BH. BG. Car, alors, BH étant à BG :: AH. GM, on auroit AH. BH :: AH. GM; & par conſéquent BH = l'Arc GM. Mais (4) AH. HL :: GM. GR; &, par la nature de la Quadratrice, AH. HL :: AB. OB (2), ou :: BH. RC; ainſi GM. GR :: BH. RC; donc, puiſque l'Arc GM égaleroit la droite BH, comme on vient de le voir, on auroit l'Arc GR égaleroit la droite RC. Ce qui eſt abſurde; car l'arc GR étant plus grand que ſa corde, & cette corde plus grande que RC, il faut que GR ſoit plus grand que RC. Il n'eſt donc pas poſſible, que la troiſiéme proportionelle aux deux quantités AH, BH, ſoit plus grande que BF.

2°. Et vous allez voir qu'il ne ſeroit pas moins abſurde d'affirmer qu'elle fût plus petite. Du Point B tracez l'arc DP; tirez ſur BH la Perpendiculaire DS; par le Point S, où elle rencontre la *Quadratrice*, menez le rayon BK, & SQ perpendiculairement ſur AB. Enſuite, raiſonnant comme au n°. 1. on démontrera l'impoſſibilité d'avoir AH. BH :: BH. BD. Car, ſi cela étoit, BH étant à BD :: AH. DP, on auroit AH. BH :: AH. DP, & par conſéquent la droite BH égaleroit l'arc DP. Or, AH. HK :: DP. DV (4), & AH. HK :: AB. QB (2), ou :: BH. DS; donc DP. DV :: BH. DS. Ainſi, puiſque DP égaleroit BH, on auroit l'arc DV égal à ſa Tangente DS; ce qui eſt abſurde (5). Il eſt donc impoſſible que la troiſiéme proportionelle aux deux Lignes AH, BH, ſoit plus petite que BF; & l'on a vû (art. 1.) qu'elle ne pouvoit pas être plus grande que cette même Ligne; par conſéquent elle lui eſt égale; c'eſt-à-dire que AH. BH :: BH. BF, ou BF. BH :: BH. AH.

3°. Or, on ſçait déterminer géométriquement une troiſiéme proportionelle à deux droites BF, BH; donc on

trouveroit la longueur de l'arc AH, & par conſéquent celle de la circonférence, qui en eſt le quadruple. Ainſi par cet artifice la circonférence du Cercle ſeroit géométriquement *rectifiée*. C. Q. F. D.

7. Mais, par la conſt. de la *Quadratrice*, il eſt impoſſible d'avoir à toute rigueur le Point F (fig. 100. PL. IX.); puiſqu'il devroit être déterminé par l'interſection du rayon BH, avec ſa parallèle menée du Point B. Or, dans ce cas, ces deux Lignes ſe confondant, il n'y a plus d'interſection. Néanmoins comme on peut, par la biſſection, diviſer EB ainſi que l'Arc VH en de très-petites parties; ce qui fera trouver des Points de la Quadratrice, compris entre Y & F, leſquels s'approcheront continuellement de BH, l'on pourra avoir géométriquement une Ligne, qui ne différera pas ſenſiblement de la Baſe BF.

8. Maintenant, j'ai démontré de pluſieurs manières dans mes *Inſtitutions*, que l'Aire du Cercle étoit égale à celle d'un Triangle, dont la Baſe ſeroit égale à la circonférence de ce Cercle, & la hauteur égale à ſon rayon. Ainſi, puiſque la *Quadratrice* donne la *rectification* de cette circonférence à très-peu près (6 & 7), on aura la Baſe & la hauteur d'un Triangle égal au Cercle, & par conſéquent ſa *Quadrature* très-approchée.

9. REMARQUE. Cette méthode d'avoir la *Quadrature* du Cercle excéſſivement approchée, eſt d'autant plus élégante, qu'elle n'exige point la deſcription de la Courbe, qui fait réſoudre ce Problème. Car, ſuppoſant par exemple, qu'au moyen de la *biſſection*, Br fût la cent vingt-huitième partie de BE, & Hd la cent vingt-huitième partie de l'Arc HV, le rayon Bd & la parallèle rZ ſe couperoient en un Point Z ſi proche de BH, que l'on pourroit prendre, ſans aucune erreur ſenſible, rZ pour la Baſe BF de la Quadratrice. Ainſi l'opération de la *Rectification* ou de la *Quadrature* du Cercle, ſe réduit uniquement ici à porter une très-petite partie du rayon BH de B en r ſur AB; de mener rZ parallèlement à BH; de prendre auſſi une très-petite partie Hd de l'Arc AH (toujours au moyen de la *biſſection*), & de tirer

le rayon *Bd* [*a*] ; car le Point d'interſection Z de *r*Z & de *Bd*, déterminera une Ligne *r*Z ſenſiblement égale à la Baſe BF de la *Quadratrice* ; d'où l'on déduit (6 & 8), ſans conſtruire cette Courbe, la rectification ou la quadrature du Cercle très-approchée.

Cependant cela ne feroit pas connoître en nombres, le rapport de la circonférence du Cercle à ſon Diamètre, quand même on en auroit la Quadrature à toute rigueur par cette méthode. Parce que la circonférence rectifiée & ſon Diamètre pourroient être incommenſurables. C'eſt pourquoi le travail d'*Archimède* à cet égard, ou celui de *Métius* ſon ſectateur, me paroît beaucoup plus eſtimable, parce que, dans la pratique des Arts, il eſt très-commode de pouvoir connoître en nombres très-approchans le Diamètre d'un Cercle par ſa circonférence, & réciproquement ſa circonférence par ſon Diamètre.

10. Il y a des modernes [*b*] qui ont attribué à cette Courbe la propriété de diviſer un Angle quelconque en un nombre quelconque de parties égales. Soit propoſé, ſelon eux, de diviſer l'Angle ABV (fig. 100) en ſept parties égales. On prendra dans le quart de Cercle, accompagné de ſa *Quadratrice*, un Angle égal au propoſé (ſi le propoſé eſt trop grand, on le coupera en deux parties égales) ; du Point Y, où l'un de ſes côtés coupe la *Quadratrice*, on abbaiſſera YE perpendiculairement ſur AB, diviſant enſuite AE dans le nombre de parties propoſé ; c'eſt-à-dire ici en 7, on mènera par les Points de diviſion M, O, &c. des parallèles Mx, OR, &c. leſquelles rencontrant la *Quadratrice*, détermineront ſur cette Courbe ſes Points *x*, R, &c. par leſquels ſi l'on mène les rayons BC, BL, l'Angle ABV ſe trouvera, ſuivant ces Auteurs, diviſé ainſi qu'on le demande. Car il eſt clair (conſt.) que AM eſt

[*a*] Bien entendu que la petite partie H*d* ſera à ſon Arc AH, comme la petite partie *r*B eſt à ſon rayon AB.

[*b*] Meſſieurs *Ozanam* & *Bélidor*.

toujours la même partie de AE, que l'Arc AC l'eſt de l'Arc AV. Or (ſupp.) AM eſt la ſeptième partie de AE; donc l'Arc AC eſt auſſi la ſeptième partie de l'Arc AV. Ainſi le Problême paroît réſolu.

11. Mais ces Auteurs n'ont pas fait réflexion, que les Points de la *Quadratrice* n'étant déterminés que par *la biſection*, ſi le côté BV de l'Angle propoſé ne tombe pas ſur quelqu'un de ces Points ainſi déterminés, & que de plus, après avoir abbaiſſé YE, on ſoit obligé de faire ſur AE d'autres diviſions que celles de la conſtruction de la Courbe, les nouvelles parallèles à BH ne rencontreront plus des Points de la *Quadratrice* trouvés géomètriquement; & par conſéquent les rayons, tirés du Point B, feront ſur l'Arc AV des diviſions incertaines.

12. La *Quadratrice* auroit inconteſtablement la propriété d'être *omni-Sectrice*, ſi l'on pouvoit aſſujettir l'extrémité A du rayon BA à parcourir uniformément l'arc AH, dans le même tems préciſément que la Ligne A*a* ſeroit portée uniformément ſur AB, parallèlement à BH; mais alors ce ſeroit ſuppoſer l'état de la queſtion; c'eſt-à-dire, que l'on pût diviſer l'arc AH en un nombre quelconque de parties égales, comme la Ligne AB; ce qui eſt préciſément ce que l'on cherche. La remarque en eſt palpable, & il y a même environ 1400 ans que *Pappus* d'*Alexandrie* l'a faite [*a*].

[*a*] Lib. 4. Collect. Mathemat. fol. 57. à Commandino ex Græco in Latinum converſarum.

DE

De la Spirale.

1. PRENEZ une Ligne quelconque CB (fig. 103.). Diviſez la en pluſieurs parties égales, comme ici en deux. Du Point C par les Points de diviſion A, B, faites paſſer des Cercles. Après quoi, diviſez le rayon CA en tel nombre de parties égales que vous voudrez, par exemple en 9 (plus le nombre en ſera grand, plus la Courbe à décrire ſera parfaite); faites les mêmes diviſions ſur la circonférence AFMA de ce rayon; par ces nouveaux Points de diviſion, menez les rayons CD, CF, CH, &c. enfin portez une des diviſions du rayon CA ſur ſon voiſin CD, de C en *o*; deux ſur le ſuivant CF, de C en *r*; trois ſur CH, de C en P; & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que vous ſoyez revenu au rayon de partance CA; joignez les Points *o*, *r*, P, &c. par une Ligne continue; & vous aurez une Courbe CoPxA, que l'on appelle *première Spirale* [*a*].

Recommencez à porter une partie du rayon CA ſur CE, de D en *b*. Deux ſur CK, de F en *e*. Trois ſur CL, de H en *d*, & ainſi de ſuite, en augmentant toujours de 1, juſqu'à ce que vous ſoyez de retour au rayon de partance CB. Par les Points *b*, *e*, *d*, &c. ainſi trouvés, faites paſſer une Ligne *Abdfh*B, laquelle miſe à la ſuite de la Courbe CoPxA, compoſera une Ligne CoPxA*bdfh*B, que l'on nomme *ſeconde Spirale*. Le Point C eſt le *centre* de ces Spirales; CA *la Ligne de première révolution;* CB *Ligne de ſeconde révolution*. Il me ſemble que ces Spirales ſeroient mieux déſignées, en appellant la Ligne CoPxA *Spirale à ſimple révolution*, la Courbe CoPxA*bdfh*B *Spirale à double révolution*, & ainſi de ſuite ſelon le nombre des Cercles. Ces dénominations rappelleroient mieux l'idée de la génération de ces Courbes.

2. Une Spirale, telle que CoPxA, peut donc être conçûe

[*a*] Elle eſt de l'invention d'*Archimède*.

engendrée par le Point C, qui coule uniformément le long du rayon CA, & le parcourt préciſément dans le même tems, que l'extrêmité A de ce rayon employe à décrire uniformément ſa circonférence; enſorte que C*r*, par éxemple, ſoit toujours la même partie du rayon décrivant CF ou CA, que l'arc AF l'eſt de ſa circonférence entière; car la génération du n°. 1. donne préciſément C*r*. CF ou CA :: AF eſt à la circonférence AHMA.

3. Par conſéquent, ſi l'on pouvoit accorder géométriquement, le mouvement uniforme du Point A ſur la circonférence AHMA, avec celui du Point C ſur le rayon CA, la Spirale CP*x*A ſeroit propre à diviſer une circonférence de Cercle en raiſon donnée. Suppoſons que l'on demandât un Arc, qui fût à la circonférence entière :: 2. 9. ayant la première Spirale décrite au-dedans de la circonférence propoſée, on couperoit ſon rayon en neuf parties égales; & prenant deux de ſes parties, on les porteroit du centre C ſur quelque Point *r* de la Spirale. Par ce Point *r* on tireroit le rayon C*r*F; & l'on auroit l'Arc AF qui ſeroit à la circonférence AHMA :: 2. 9. Car C*r* eſt toujours à CF ou CA, comme l'Arc AF eſt à la circonférence AHMA (2): mais (conſt.) C*r*. CA :: 2. 9. Donc AF. AHMA :: 2. 9. Ainſi le Problême ſeroit réſolu.

4. Mais, comme on ne ſçait point diviſer géométriquement une circonférence de Cercle en un nombre quelconque de parties égales, cette Courbe a le même défaut que l'on a fait remarquer au n°. 11. de la *Quadratrice*. Il ne faut donc attendre aucune utilité de *la Spirale d'Archiméde*, dans les opérations où l'on recherche une préciſion abſolue. Les Arts de goût peuvent en faire uſage; parce qu'il ne s'y agit que d'offrir aux ſens, des contours ou des circonvolutions qui les touchent agréablement.

De la Cycloïde.

1. CONCEVONS que le Cercle AO (fig. 104.), touchant la droite AC au Point A, roule ſur cette droite, juſqu'à ce que tous les Points de ſa circonférence ſe ſoient exactement appliqués ſur AC; de manière que le Point A ne retombe en C, qu'après avoir fait une révolution entière autour de ſon centre. Il eſt évident que ce Point décrira une Courbe, telle que AFBC, à laquelle les Modernes ont donné les noms de *Trochoïde*, *Roulette*, ou plus communément de *Cycloïde*. Elle eſt tout-à-fait ſemblable à celle que décrit en l'air un des clous de la roue d'une charette, qui ſe meut dans un même Plan en roulant ſur une droite.

2. COR. I. On voit, par la génération de cette Courbe, que ſa Baſe AC eſt exactement égale à la circonférence du Cercle générateur AO; que ce Cercle étant arrivé au Point de milieu D, le Point *décrivant* A a couru la demi-circonférence; & que dans cette poſition de ſon Cercle, il eſt parvenu au *Point culminant* B, c'eſt-à-dire, le plus élevé au-deſſus de ſa Baſe AC; qu'en redeſcendant il a décrit la portion BPC parfaitement égale & ſemblable à la *demi-Cycloïde* AFB.

3. COR. II. Ainſi toutes les doubles Ordonnées, comme FP, menées d'un Point quelconque F de la Courbe parallèlement à ſa Baſe, ſont coupées en deux parties égales par la Ligne BD, tirée du milieu de AC au Point culminant B. C'eſt pourquoi ces doubles Ordonnées, tombant à Angles droits ſur BD (conſt.), cette Ligne BD a été appellée l'*Axe* de la *Cycloïde*.

4. COR. III. Enfin il eſt encore viſible, qu'en élevant une Perpendiculaire BO ſur l'Axe, à ſon Point culminant B, elle ſera Tangente à la *Cycloïde* & parallèle à ſa Baſe. Parce que le Point A décrivant ſe trouvera toujours au-deſſous de

cette parallèle ou perpendiculaire, ſoit avant d'être arrivé au Point culminant B, ſoit après l'avoir paſſé.

5. PROPOS. I. Suppoſant que le Cercle générateur AO ait roulé ſur AC juſqu'en L; que le Point décrivant A ait monté en F; que par conſéquent ce Cercle ait pris la poſition LFM; ſi on le conçoit encore décrit ſur l'Axe BD, je dis que *la partie* FH *d'une Ordonnée quelconque* FK *à la Cycloïde, compriſe entre cette Courbe & la rencontre du Cercle générateur en* BD, *eſt toujours égale à l'Arc* HB *de ce Cercle, compris entre le Point de rencontre* H *& le Point culminant* B.

DÉM. Tous les Points de l'arc FL s'étant appliqués ſur la partie AL (ſupp.), on a la droite AL = l'arc FL. Or l'arc FL = l'arc HD; ainſi la droite AL = l'arc HD. Mais (1) AL + LD = la demi-circonférence du Cercle générateur = HD + HB; donc, puiſque AL = HD, il faut que l'arc HB = la droite LD = GK = GH + HK = FG + GH (à cauſe de HK = FG) = FH; par conſéquent la droite FH = l'arc HB. C. Q. F. D.

6. Réciproquement, ſi une Courbe eſt telle qu'ayant décrit un Cercle ſur ſon Axe BD, toutes les droites tirées comme FH de l'un de ſes Points quelconque, ſoient toujours égales à l'arc correſpondant HB; cette Courbe ſera néceſſairement une *demi-Cycloïde*, dont BHD ſera le Cercle générateur.

DÉM. Puiſque FH = toujours l'arc HB (ſupp.), la droite AD, tirée de la même manière que FH, eſt égale à la demi-circonférence BHD. Donc, en faiſant rouler le cercle BD ſur AD, le Point B, ſuppoſé d'abord en A, aura décrit une *demi-Cycloïde*, quand le cercle ſera arrivé en D (1). Ainſi, en tirant d'un Point quelconque H de la demi-circonférence du Cercle BD, une Ligne parallèle à AD juſqu'à la rencontre de la *demi-Cycloïde*, cette parallèle ſera toujours égale à l'arc correſpondant HB (5); or (ſupp.) l'arc HB = la droite FH; donc cette parallèle n'eſt pas différente de FH. Ainſi tous les Points de la *demi-Cycloïde* ſe confondant avec tous ceux de la Courbe propoſée, cette Courbe eſt néceſſairement une *demi-Cycloïde*. Ce qu'il faut bien remarquer.

7. PROP. II. Ayant mené une Ordonnée quelconque fh à la *Cycloïde*, juſqu'à la rencontre h du cercle générateur, ſi après avoir tiré à ce Point h une Tangente hS au cercle, l'on mène par f & du côté de AC, une parallèle fl à cette Tangente, je dis que fl entrera néceſſairement au-dedans de l'eſpace cycloïdal.

DÉM. La parallèle fl à la Tangente hS, entrera au-dedans de la Cycloïde, ou tombera entièrement au-dehors, comme fm: or ce dernier cas eſt impoſſible.

1°. Car, en prenant l'arc ht plus petit que l'arc Bh, & tirant du Point t une parallèle tm à fh, juſqu'à ce qu'elle coupât le prolongement de hS en b, la *Cycloïde* en P, & fm en m, l'on auroit $mP + Pb + bt > Pb + bt$: or (5) $Pb + bt =$ l'arc $Bh +$ l'arc ht; ainſi $mP + Pb + bt >$ l'arc $Bh +$ l'arc ht. Mais, puiſque fm ſeroit parallèle à hb (ſupp.), $mP + Pb$ égaleroit $fh =$ l'arc Bh (5); donc l'arc $Bh + bt$ ſeroit > l'arc $Bh +$ l'arc ht, c'eſt-à-dire que la droite bt ſeroit > l'arc ht; &, à plus forte raiſon, plus grande que la corde ht. Ainſi dans le Triangle bht, l'Angle thb ſeroit plus grand que l'Angle hbt. Ce dont je vais démontrer l'abſurdité.

2°. Pour vous en convaincre, prolongez mt juſqu'en H; & vous reconnoîtrez que l'Angle hbt ou hbH eſt meſuré par la moitié de l'arc hBH, moins la moitié l'arc ht; c'eſt-à-dire que l'Angle $hbH = \frac{\text{l'arc BH}}{2} + \frac{\text{l'arc B}h}{2} - \frac{\text{l'arc }ht}{2}$ (M). Mais l'arc $BH =$ l'arc $Bg +$ l'arc $gH =$ l'arc $Bh +$ l'arc ht. Donc $\frac{\text{l'arc BH}}{2} = \frac{\text{l'arc B}h}{2} + \frac{\text{l'arc }ht}{2}$. Donc, en mettant dans l'équation M cette valeur de $\frac{\text{l'arc BH}}{2}$, on aura l'Angle $hbH =$ l'arc entier Bh, ou eſt meſuré par l'arc entier Bh: mais l'Angle thb eſt meſuré par la moitié de l'arc ht; donc, puiſque (ſupp.) l'arc ht eſt plus petit que l'arc Bh, l'Angle thb eſt néceſſairement plus petit que l'Angle hbH ou

hbt. Mais on a déja vû (art. 1.) que l'Angle *thb* ſeroit plus grand que l'Angle *hbt*. Par conſéquent, ſi la Ligne menée par le Point *f*, du côté de AC parallèlement à *h*S, n'entroit pas dans l'eſpace cicloïdal, l'Angle *thb* ſeroit en même-tems plus grand & plus petit que l'Angle *hbt*. Ce qui n'eſt pas poſſible. Donc, &c.

8. PROPOS. III En ſuppoſant toujours *f h* parallèle à AC, & *h*S Tangente au Point *h* du Cercle, ſi l'on conçoit que *fm* ſoit Tangente à la *Cycloïde*, il arrivera néceſſairement que *h*S ſera coupée en quelque Point S, par le prolongement *f*S de la Tangente *fm*; c'eſt-à-dire que les deux Tangentes correſpondantes *f*S, *h*S, de la *Cycloïde* & du Cercle, ſont néceſſairement déterminées à ſe rencontrer.

DÉM. Tirez *f l* parallèlement à *h*S; cette parallèle entrera au-dedans de la *Cycloïde* (7): or *fm* étant ſuppoſée Tangente, tombera entièrement au-dehors; ainſi *fm* & *f l* ne formeront pas une ſeule & même Ligne. Donc, puiſque *fm* coupe *f l*, étant prolongée elle coupera auſſi *h*S parallèle à *f l*. Les deux Tangentes correſpondantes *f*S, *h*S, de la Cycloïde & de ſon Cercle générateur, ſont donc néceſſairement déterminées à ſe rencontrer.

9. PROPOS. IV. Ayant tiré *f h* parallèlement à AC, ſi l'on ſuppoſe *f*S Tangente à la Cycloïde en *f*, & *h*S Tangente au Point correſpondant *h* du Cercle générateur, je dis que ces deux Tangentes ſe rencontreront en un Point S, tel que *f h* = *h*S.

DÉM. 1°. Ces deux Tangentes ſe rencontreront en quelque Point (8).

2°. Pour avoir une démonſtration bien ſimple que *f h* = *h*S, concevez que l'on ait tiré, très-proche de *f h*, une parallèle *ux* à cette Ligne. Alors, à cauſe de l'extrême petiteſſe des arcs *fu*, *hx*; de la Cycloïde & du Cercle, compris entre ces deux parallèles, on pourra les regarder, ſans aucune erreur ſenſible, comme des portioncules de leur Tangente correſpondante; ce qui donnera les Triangles ſemblables *f h*S, *ux*S, d'où l'on tirera cette proportion *f h*. *ux* :: *h*S. *x*S. Donc *f h* — *ux*. *f h* :: *h*S — *x*S. *h*S (T). Or

$fh = Bb$, & $ux = Bx$ (5); ainſi $fh - ux = Bb - Bx = bx$: de plus $bS - xS = bx$. Donc, (en mettant dans la proport. T. bx au lieu de $fh - ux$, & bx en la place de $bS - xS$) on aura $bx. fh :: bx. bS$; donc $fh = bS$. C. Q. F. D.

10. Réciproquement, après avoir tiré d'un Point quelconque f de la Cycloïde, une parallèle fh à AC; & du Point h, où cette parallèle rencontre le Cercle générateur, mené une Tangente bK à ce Cercle, ſi l'on fait $bS = fh$, je dis qu'en joignant les Points f, S, la Ligne fS ſera Tangente à la Cycloïde.

Dém. Si elle ne l'étoit pas; on pourroit donc par le Point f, en tirer une autre comme fK, laquelle ſeroit Tangente, & tomberoit par conſéquent au-deſſus ou au-deſſous de fS. Or cela eſt impoſſible. Car, ſi fK étoit Tangente en f, on vient de voir (9) qu'alors bK égaleroit fh; mais (ſupp.) $fh = bS$; donc bK égaleroit bS. Ce qui eſt abſurde. Et c'eſt préciſément la même démonſtration, quand fK tombe au-deſſous de fS. Donc, &c.

11. Prop. V. Suppoſant le Triangle fbS, comme ci-deſſus, je dis que la corde bB, tirée du Point de rencontre b au Point culminant B, eſt parallèle à la Tangente fS.

Dém. 1°. Prolongez fb juſqu'en g; afin de reconnoître que l'Angle Sbg a pour meſure la moitié de l'Arc bBg (n°. 105. *Inſt. T.* 1.), ou l'Arc entier bB; mais l'Angle SbB n'a pour meſure que la moitié de ce même Arc (*ibid.*) ainſi l'Angle $Sbg = 2\,SbB$.

2°. Remarquez maintenant que l'Angle Sbg étant extérieur au Triangle fbS, vaut la ſomme des deux Angles f, S, de ce Triangle (n°. 65. *Inſt. T.* 1.); or l'Angle $f = S$, parce que $fh = bS$ (9); donc l'Angle $Sbg = 2\,S$. Mais on a vu (Art. 1.) que l'Angle $Sbg = 2\,SbB$; ainſi $2\,S = 2\,SbB$, ou l'Angle $S =$ l'Angle SbB ſon alterne. Ce qui démontre que bB eſt parallèle à fS. (n°. 50. *Inſt. T.* 1.).

12. Réciproquement, d'un Point quelconque f de la Cicloïde tirant fh juſqu'à la rencontre b du Cercle générateur, & perpendiculairement à ſon Axe BD, ſi l'on mène

la corde *h*B juſqu'au Point culminant B, & que l'on trace *f*S parallèlement à *h*B, cette Ligne *f*S ſera Tangente au Point *f* de la Cicloïde.

DÉM: Au Point *h* du Cercle menez la Tangente *h*S, laquelle rencontrera *f*S en quelque Point S, puiſqu'elle rencontre *h*B parallèle à *f*S (ſupp.). Prolongez encore *fh* juſqu'en *g*. alors vous trouverez que l'Angle S*fh* = l'Angle B*hg* = S*h*B = *f*S*h* ſon alterne. Ainſi l'Angle S*fh* = *f*S*h*; donc *h*S = *fh*; & par conſéquent (10) *f*S eſt Tangente à la Cycloïde.

13. D'où il ſuit que la Perpendiculaire AO ſur la Baſe AC de la Cycloïde, au Point A ou C d'origine, eſt Tangente à cette Courbe. Cette Perpendiculaire ayant toutes les qualités requiſes pour être Tangente. Car AD rencontre perpendiculairement BD, & la Ligne AO eſt parallèle à la corde ou au Diamètre BD, tiré du Point de rencontre D au Point B culminant. Ainſi la Perpendiculaire AO, eſt Tangente à la Cycloïde (11).

14. PROB. Trouver la Quadrature ou déterminer la ſurface de la *Cycloïde*. (fig. 105.)

RÉSOLUT. Soit AD la Baſe d'une demi-Cycloïde AMB; la demi-circonférence BPD de ſon Cercle générateur = AD; & DG le Rectangle de la demi-Baſe AD & de l'Axe BD. Concevons que BG ou AD ſoit diviſée en un nombre de parties égales, telles que GF, ſi petites que la ſomme des Rectangles FGAS *circonſcrits* à l'eſpace GBMAG, différe de la ſomme des *inſcrits* GFML à ce même eſpace, moins que d'une grandeur donnée quelconque, ainſi que nous en avons démontré la poſſibilité au n°. 68 de la Parabole. Par le Point M, où la Perpendiculaire FS coupe la Courbe, menons LMPQ parallèlement à AD; & du Point P, où elle coupe le Cercle, ſoient tirées la Perpendiculaire PH, ainſi que la corde PB, laquelle eſt parallèle à la Tangente AMT au Point M de la Cycloïde (11). Cette conſtruction ſuppoſée.

I. A cauſe de GF exceſſivement petite, la Portioncule AM de la Courbe peut être conſidérée, comme faiſant par-

tie de la Tangente AT au Point M. Donc AM eſt parallèle à BP (11); ainſi les Triangles ASM, BQP, étant ſemblables, on en tire BQ. QP :: MS. AS $= \frac{QP \times MS}{BQ} =$ LM.

De plus GL $=$ BQ. Donc GL $\times$ LM $=$ BQ $\times \frac{QP \times MS}{BQ}$ $=$ QP $\times$ MS $=$ QP $\times$ PH (à cauſe de MS $=$ PH); c'eſt-à-dire que le petit Rectangle GL $\times$ LM, *inſcrit* à l'eſpace GBMAG, eſt égal au petit Rectangle QP $\times$ PH correſpondant, *circonſcrit* au demi-Cercle générateur, & cela arrivera à tous les Points de la Courbe déterminés comme M. Donc la ſomme des Rectangles *inſcrits* à l'eſpace GBMAG, eſt égale à la ſomme des Rectangles *circonſcrits* au demi-Cercle; or (69. Parab.) chacune de ces ſommes eſt égale à ſon eſpace reſpectif. Par conſéquent l'eſpace GBMAG, ou la ſurface compriſe entre les Lignes GA, GB, & la Courbe AMB, eſt égale à l'Aire du demi-Cercle générateur BPD.

II. Maintenant le Rectangle DG $=$ AD $\times$ BD, & l'Aire du demi-Cercle générateur $=$ la demi-circonférence BPD ou AD $\times \frac{BD}{4}$; c'eſt-à-dire que le demi-Cercle générateur, ou l'eſpace GBMAG, qui eſt égal à ce demi-Cercle (art. 1.), n'eſt que le quart du Rectangle DG; ainſi l'Aire AMBDA de la demi-Cycloïde en eſt les trois quarts. Ce qui démontre que l'Aire de la demi-Cycloïde eſt à celle du demi-Cercle générateur, comme 3 eſt à 1. *La ſurface de la Cycloïde entière eſt donc triple de l'Aire de ſon Cercle générateur.* C. Q. F. T. & D. [a].

15. Cor. Si l'on avoit la Quadrature abſolue du Cercle, on auroit donc auſſi celle de la *Cycloïde* & réciproquement.

---

[a] On voit ici une nouvelle preuve de l'élégance de la *Méthode des Limites* pour la *Quadrature des Courbes*. La conſtruction & la démonſtration de ce Problême, réſolu par le *Calcul intégral*, ne ſont aſſurément pas plus ſimples. On a de plus l'avantage de ſe paſſer de ce Calcul; & l'on y jouit de toute la clarté de la *Méthode Synthétique*, ſans en eſſuyer les longueurs.

15. PROBLÈME. Décrire une *Cycloïde*.

La réſolution en peut être ou toute Mécanique, ou en partie Mécanique & en partie Géométrique.

RÉSOL. I. Tout-à-fait Mécanique. Préparez deux Planches ou deux Ais bien unis, bien nivelés, qui s'entre-coupent à Angles droits, l'un horiſontalement & l'autre verticalement; que l'horiſontal porte deux couliſſes très-planes & très-lubrifiées, entre leſquelles on puiſſe retenir, exactement & ſans force, un Cylindre, dont les Baſes circulaires s'appliquent bien préciſément ſur les couliſſes; que la Baſe du côté de l'Ais vertical, ſoit armée d'une Pointe ou d'un crayon perpendiculaire, qui n'ait que la ſaillie néceſſaire, pour effleurer très-légérement la ſurface du Plan vertical. Il eſt évident, ſuivant cette préparation, qu'en faiſant rouler le Cylindre entre les deux couliſſes, l'extrêmité de la pointe ou du crayon marquera, ſur la ſurface verticale, un trait qui ſera une *Cycloïde* (1).

17. REMARQ. 1°. Il eſt néceſſaire que les couliſſes ſoient exactement en Ligne droite, parallèles, & lubrifiées moyennant quelques matières graſſes; afin que les Baſes du Cylindre roulans toujours dans un même Plan, n'éprouvent aucuns ſoubreſauts; & qu'ainſi la Cycloïde ſoit le plus parfaitement continue qu'il eſt poſſible.

2°. La pointe décrivante doit être avancée vers le Centre de la Baſe du Cylindre où elle eſt arrêtée, autant qu'il en eſt beſoin pour que la ſaillie des couliſſes n'en arrête ou n'en gêne point le mouvement dans la partie inférieure de ſa révolution.

3°. Afin qu'on ait bien préciſément une révolution entière de la Baſe Cylindrique, marquée ſur le Plan vertical, on fera rouler le Cylindre de manière que l'on ait la fin d'une révolution, une révolution entière & le commencement d'une autre; par là on aura les deux Points, qui termineront la Baſe de la révolution entière, & par conſéquent une Cycloïde complette.

4°. Si l'on veut avoir en Ligne droite, la longueur de la circonférence du Plan décrivant; après avoir enfoncé,

ſur la ſurface convéxe du Cylindre, une pointe très-fine laquelle ait fort peu de ſaillie, on enduira d'une très-légère couche de cire, le Plan horiſontal ſur lequel doit rouler le Cylindre. Par là l'impreſſion de la pointe fera voir le commencement & la fin d'une révolution; ce qui donnera la circonférence décrivante éxactement rectifiée.

18. RÉSOL. II. En partie Mécanique & en partie Géométrique. Nous diſons que cette réſolution eſt en partie *Mécanique*, parce qu'elle eſt fondée ſur la rectification de la circonférence du Cercle; Problême qui n'a pas encore été réſolu *géométriquement*; elle eſt néanmoins en partie *Géométrique*, en ce que la rectification du Cercle ſuppoſée, on la déduit des propriétés connues de la Courbe à décrire, ainſi qu'on va le voir.

Soit AD (fig. 106.) la demi-Baſe d'une demi-Cycloïde à décrire, laquelle Baſe ſoit égale à la demi-circonférence BMD de ſon Cercle générateur. (ce que l'on déterminera mécaniquement (art. 4. du n°. 17), ou en enveloppant un Cylindre avec une meſure pliante, que l'on remettra enſuite en Ligne droite, &c.). Élevons le Diamètre BD du Cercle générateur, perpendiculairement ſur l'extrêmité D de cette demi-Baſe; &, après avoir décrit la moitié de ce Cercle, diviſons la demi-circonférence BMD en autant de parties égales que nous voudrons & pairement paires [a] (plus le nombre en ſera grand, plus la deſcription de la Courbe ſera éxacte); faiſons le même nombre de diviſions, 6 par éxemple, ſur la Ligne AD; par les Points de diviſion O, M, L, K, I, de la demi-circonférence, menons des Lignes parallèlement à AD; donnons à OP 5 parties de AD; 4 à MH; 3 à LG; 2 à KF; & 1 à IC. Je dis qu'après cela; ſi l'on joint par une Courbe continue les Points A, P, H, G, F, C, B, l'on aura une demi-Cicloïde, dont BMD ſera le demi-Cercle générateur.

DÉM. Par la conſt. AD = la demi-circonférence BMD;

[a] Ce qui ſe déterminera par la *diviſion*, répétée autant de fois qu'on le jugera néceſſaire.

donc la ſixième partie de AD = la ſixième partie de BMD ; ainſi OP, qui vaut 5 ſixièmes de AD (conſt.) eſt égale à l'arc BO, qui vaut auſſi 5 ſixièmes de BMD ou de AD ; donc le Point P eſt à une demi-Cycloïde, dont BMD eſt le demi-Cercle générateur (6). Et faiſant un ſemblable raiſonnement, par rapport aux Points H, G, &c. on trouvera qu'ils ſont à la même Courbe. De manière que, ſi l'on répète cette même conſtruction de l'autre côté de BD, on aura une Cycloïde entière. Et c'eſt C. Q. F. T. Et D. [a]

19. DÉF. Concevons que la demi-Cycloïde, ou une Courbe quelconque BCA, (fig. 107.) toujours concave d'un même côté, ſoit enveloppée d'un fil ; que ce fil ſe détache de la Courbe peu à peu, par ſon extrémité B ; de manière que ſa partie FC détachée, ſoit toujours éxactement tendue en Ligne droite. Il eſt clair que dans ce mouvement, le Point B décrira une autre Courbe BFM [b], que l'on nomme *développante*, *ligne d'évolution* ou *de développement* ; & alors la ligne BCA s'appelle *développée* ; les parties du fil, telles que CF, détachées de deſſus BCA, ſe nomment *rayons de la développée*.

20. COR. I. De cette génération de la *développante*, il s'enſuit 1°. que tout rayon FC de la *développée* eſt toujours égal à la partie BC de cette Courbe de deſſus laquelle il s'eſt détaché. 2°. Que ce rayon eſt une Tangente à la *développée* au Point C, où il y tient encore ; parce qu'en prolongeant FC vers P, on s'apperçoit que la *développée* ſe courbant en C, quitte la direction CP, immédiatement après ce Point ; &, comme le fil n'entre point dans la Courbe, (ſupp.), il eſt évident qu'il ne la touche qu'au Point C.

21. COR. II. En élevant, à l'extrêmité F d'un rayon

[a] Il me ſemble que cette conſtruction de la *Cycloïde* eſt plus facile, plus courte, & qu'elle comporte une démonſtration plus ſimple, que celles qui ſe trouvent ordinairement dans les Livres.

[b] Ce qui ſera démontré particulièrement au n°. 22. On fera même voir, au n°. 23. qu'elle eſt toujours concave ou convexe du même côté.

quelconque FC de la *développée*, une Perpendiculaire FG ſur ce rayon, je dis qu'elle ſera Tangente à la *développante* BFM; & qu'ainſi *tous les rayons* d'une *développée* ſont Perpendiculaires à ſa *développante*.

DÉM. Si FG touchoit ou étoit déterminée à toucher la Courbe en quelqu'autre Point H [*a*] pris du côté de M; 1°. En amenant le rayon de la *développée* à ce Point H, en ſorte que devenant EH il coupât FCP en L, on auroit LH > LF; (parce que LF étant Perpendiculaire ſur FG (ſupp.), LH lui ſeroit oblique); donc LH + LE > LF + LE; or LF + LE = FC + CL + LE = BC + CL + LE (à cauſe de FC = BC (20)); donc LH + LE, c'eſt-à-dire, HE ou la Courbe BCE > BC + CL + LE; ainſi la portion CE de cette Courbe ſeroit plus grande que CL + LE. Ce qui eſt abſurde.

2°. En faiſant paſſer le rayon de la *développée* à quelque Point K de la *développante*, pris du côté de B par rapport à F, on démontrera comme ci-deſſus, que la Perpendiculaire FG prolongée ne peut pas toucher ou couper la la Courbe en ce Point. Car alors le rayon de la *développée* devenant RK, ſi l'on tire la droite CK & la corde CR, l'on aura RK = RB (20), & l'arc RC > la corde RC; donc RB + l'arc RC ou l'arc entier BC > RK + la corde RC; or RK + la corde RC > la droite CK; & CK > CF; (parce que CF étant (ſupp.) Perpendiculaire ſur FG, il faut que CK lui ſoit oblique; & par conſéquent CK > CF); donc, à plus forte raiſon, l'arc BC ſeroit > CF. Ce qui ne peut pas être, puiſque (20) BC = CF. la Perpendiculaire FG ne rencontre donc la *développante* qu'au ſeul Point F.

3°. Mais, comme cela ne ſuffit pas pour démontrer que

[*a*] On a pris H aſſez éloigné du Point F, pour mettre plus de diſtinction dans la figure. Mais cela ne nuit point à la force de la démonſtration; parce qu'elle s'étend à un Point quelconque.

FG eſt Tangente ; puiſqu'il eſt poſſible qu'une *ſécante* ne rencontre une Courbe qu'en un ſeul Point ; il faut encore faire voir que FG, prolongée du côté de B ou de M, ne coupe point BFM au Point F.

Si elle étoit Sécante en F, elle paſſeroit entre la portion FB de cette Courbe, & le rayon FC de la *développée*, & rencontreroit alors la Courbe BCA en quelque Point *y*, entre B & C ; ou elle paſſeroit entre l'arc FM & le rayon FC ; & couperoit ainſi quelque rayon HE de la *développée*, en quelque Point *u* compris entre les extrêmités H, E, de ce rayon. Or ces deux cas ſont impoſſibles.

Car d'abord, ſi FG perpendiculaire ſur FC paſſoit en *y*, en tirant la corde C*y* (que je ſuppoſe tirée, ainſi que F*y* & F*u*, pour éviter la confuſion) on auroit C*y* > CF ; mais CF = l'arc CB (20.) ; donc C*y* > l'arc CB. Ce qui eſt abſurde.

Si l'on vouloit d'un autre côté que FG paſsât en *u* ; alors *u*L > FL ; donc *u*L + LE > FL + LE ; or FL + LE > la Courbe BE = le rayon HE (20) ; donc *u*L + LE, c'eſt-à-dire, *u*E ſeroit > HE. Autre abſurdité.

La Perpendiculaire FG touche donc la *développante* au ſeul Point F, ſans la couper. Et, comme ce raiſonnement eſt appliquable à tous les Points de cette Ligne, il s'enſuit que tous les rayons d'une *développée*, toujours concave d'un même côté, ſont perpendiculaires à ſa *développante* ; parce qu'en parlant d'une perpendiculaire à une Courbe, on entend une perpendiculaire à quelque droite, au Point où cette droite touche la Courbe.

22. COR. III. Ceci démontre que la *développante* BFM eſt effectivement une Courbe, ainſi que nous l'avons ſuppoſé. Puiſque BFM étant une droite, ſa partie FH en ſeroit une auſſi. Ainſi les trois Angles du Triangle LFH vaudroient plus de deux Angles droits ; car (21.) les deux Angles LFH, LHF, vaudroient chacun un Angle droit : or cela eſt abſurde ; donc il eſt impoſſible que BFM ne ſoit pas une Courbe.

23. COR. IV. Une Tangente quelconque FG à la *dé-*

développante BFM, laiſſe donc cette Courbe entièrement d'un même côté. Par conſéquent la *développante* d'une Courbe, toujours concave du même ſens, eſt pareillement toujours concave du même ſens que ſa *développée*; puiſqu'elle ne pourroit avoir un *Point d'inflexion* ou *de rebrouſſement*, c'eſt-à-dire ſe tourner d'un autre ſens, ſans être coupée par quelqu'une de ſes Tangentes.

24. LEMME. Deux Courbes BA, BM (fig. 107.), toujours concaves du même côté, & qui ont la même origine B, ne peuvent être telles que toutes les perpendiculaires à l'une ſoient en même-tems perpendiculaires à l'autre.

DÉM. Pour que cela fût, il ſeroit néceſſaire que toutes les Tangentes de l'une, fuſſent parallèles à toutes les Tangentes correſpondantes de l'autre [a]; or cela eſt impoſſible. Et c'eſt d'abord une choſe évidente, ſi les deux Courbes ſe croiſent ou tendent à ſe croiſer; parce que les Tangentes au Point d'interſection ſe croiſant auſſi, ne pourront pas être parallèles.

2°. Si elles ne ſont que ſe toucher au Point B d'origine, alors les deux Tangentes ſe confondant en ce Point, pourront à la vérité être cenſées parallèles; mais la Tangente de l'une au Point qui ſuivra immédiatement celui de contingence ne pourra pas être parallèle à la Tangente correſpondante de l'autre; parce que les Tangentes pouvant être regardées comme des petits côtés de leur Courbe, s'il y en a deux qui ſe confondent entièrement, les deux petits côtés ſuivans ou les deux petites Tangentes ſuivantes, partans de la même extrêmité, ne pourront pas être parallèles; & par conſéquent la perpendiculaire à l'une ne pourra pas être perpendiculaire à l'autre. Ce qu'il eſt très-important de bien remarquer.

[a] Parce qu'une Perpendiculaire à une Courbe, eſt une Ligne qui fait des Angles droits avec la Tangente, au Point où cette Perpendiculaire rencontre la Courbe. Donc, ſi une même Ligne étoit perpendiculaire à deux Courbes, en tirant des Tangentes aux Points de rencontre, ces Tangentes ſeroient perpendiculaires ſur une même Ligne, & par conſéquent parallèles entr'elles.

25. Cor. Donc, ſi deux Courbes, dont on ignore la nature, ſont telles qu'étant toujours concaves d'un même côté avec un même Point d'origine, toutes les Perpendiculaires à l'une ſoient auſſi Perpendiculaires à l'autre; il en faudra conclure que ces deux Lignes ſont néceſſairement une ſeule & même Courbe; puiſqu'autrement la choſe ſeroit impoſſible (24).

26. Prob. Une *demi-Cycloïde* BCA étant donnée, déterminer la nature de ſa *développante* BFM. (fig. 108.)

Résol. 1°. Après avoir conſtruit le Rectangle DR, rappellons-nous que tout rayon CF de la *développée* BCA, eſt une Tangente à cette *développée* (art. 2. du n°. 20.); donc, en tirant du Point de contingence C la parallèle CH à la Baſe AD, pour avoir la corde HB; cette corde ſera parallèle à CF (11). Ainſi l'Angle BLF = HBL ſon alterne. Donc, ſi l'on conſtruit un Cercle ſur la Perpendiculaire LO égale à l'Axe BD, ce Cercle coupera le rayon CF de la *développée* en un Point F, tel que l'arc FL = l'arc BH [a]; or l'arc BH = la droite CH (5), & CH = BL (à cauſe du Parallèlogramme BLCH) donc l'arc FL = la droite BL.

2°. Maintenant, quand la Courbe BCA ſera entièrement *développée*, le fil de cette *développée* ne la touchera plus qu'au Point A, & ſera par conſéquent Perpendiculaire ſur AD (13); donc le rayon de la *développée* prendra alors la poſition AM. Ainſi, en conſtruiſant un Cercle ſur RM = AR = BD, & tirant FT parallèle à BR, on aura l'arc TR = l'arc FL = la droite BL (art. 1.); donc la droite LR = l'arc TM; parce que la demi-circonférence MTR = AD = BR (conſt.)

3°. L'Angle TRL = l'Angle FLB; parce que l'arc TR

[a] Parce que l'Angle BLF eſt meſuré par la moitié de l'arc FL, & l'Angle HBL a pour meſure la moitié de l'arc BH. Donc les Angles BLF, HBL, étant égaux, leurs meſures ſeront égales, & par conſéquent les doubles de ces meſures, c'eſt-à-dire, les arcs FL, BH, ſont égaux.

l'arc FL ; donc la corde TR eſt parallèle & égale à la corde FL ; ainſi LR = FT ; donc, puiſque LR = l'arc TM (art. 2.), on aura FT = l'arc TM. Et la même choſe arrivera à tout Point d'un rayon quelconque de la *développée*, déterminé comme F. Par conſéquent (6) tous ces Points compoſeront une *demi-Cycloïde* BFM, tout-à-fait égale à la Courbe BCA.

4°. Ainſi, en menant FO parallèlement à la corde TM, elle ſera Tangente à cette *demi-Cycloïde* (12). Or (à cauſe de TR parallèle à FL, & de TM parallèle à FO) il eſt clair que l'Angle OFL = MTR ; donc MTR étant droit, l'Angle OFL l'eſt auſſi. Par conſéquent le rayon CF de la *développée* eſt perpendiculaire au Point de contingence de la Tangente OF ; il l'eſt donc auſſi à la *demi-Cycloïde* à laquelle le Point de contingence F appartient. Tous les rayons de la *développée* BCA ſeront donc perpendiculaires à une *demi-Cycloïde*, laquelle prenant ſon origine au Sommet B de cette *développée*, lui ſera entièrement égale & très-évidemment concave du même côté. Mais, quelle que ſoit la *développante* de la Courbe BCA, tous les rayons de cette *développée* ſeront auſſi perpendiculaires ſur ſa *développante* (21), laquelle a la même origine & eſt concave du même côté que BCA (23) ; donc (25) *la développante de la demi-Cycloïde* BCA, *eſt auſſi une demi-Cycloïde* BFM *tout-à-fait égale à ſa développée*. C. Q. F. T. & D.

Cette démonſtration étant importante pour la ſuite, il eſt bon de la réſumer en peu de mots.

La *demi-Cycloïde* conſtruite ſur la Baſe BR = AD, avec un Cercle RM égal au générateur BD de la *développée* BCA, a la même origine B & eſt concave du même côté que la *développante* de BCA. De plus tous les rayons de la *développée* ſont perpendiculaires ſur la *demi-Cycloïde*, dont la Baſe eſt BR ; or ils le ſont auſſi ſur la *développante* de BCA (21), donc la *demi-Cycloïde* engendrée ſur BR, eſt la même Courbe que la *développante* de BCA ; puiſqu'autrement toutes les Perpendiculaires à l'une ne pourroient pas être perpendiculaires à l'autre (25). *La développante de la Cycloïde eſt donc auſſi une Cycloïde, égale en tout à ſa développée.*

27. Cor. I. Puiſque le rayon d'une *développée* eſt toujours égal à la partie développée de cette Courbe (20), on a l'Arc. CB = CF = CL + LF. Or, (à cauſe de l'Angle BLF = HBL) LF = HB, & HB = CL; parce que la figure BHCL eſt un parallélogramme (art. 1. du n°. 26.); donc LF = CL; ainſi CF double de CL, eſt auſſi double de la corde HB = CL. Par conſéquent l'*Arc Cycloïdal* CB, qui eſt toujours égal au rayon CF, *eſt toujours double de la corde* HB *correſpondante du Cercle générateur* DBH. Ce qu'il faut bien remarquer.

28. II. Par la même raiſon, MR étant = AR = BD; le rayon AM de la *développée* = 2AR = 2BD. Mais AM = la demi-Cycloïde ACB (13 & 20); donc ACB = 2BD; c'eſt-à-dire, que la Courbe ACB d'une demi-Cycloïde, eſt double du Diamètre de ſon Cercle générateur. *La longueur de la Courbe d'une Cycloïde entière eſt donc quadruple du Diamètre de ſon Cercle générateur* [a].

29. Cor. III. Si on renveloppoit la *demi-Cycloïde* ACB avec le fil AM, qui lui eſt égal, & en allant de M vers B; de manière que la partie du fil, qui ne ſeroit pas encore appliquée à la Courbe, fût toujours tendue en Ligne droite; il eſt évident que ſon extrémité M, décriroit la même demi-Cycloïde BFM. Parce que le fil, en ſe renveloppant, prendroit préciſément, mais en ſens rétrograde, les mêmes Poſitions qu'en ſe développant. Ainſi, au lieu de replier le fil ſur la *demi-Cycloïde* ACB du côté de B, il n'y a qu'à l'appliquer, en allant de M vers E, ſur la *demi-Cycloïde* AE; laquelle ayant le même Point d'origine A, eſt tout-à-fait la même de grandeur & de poſition que la Courbe ACB: & alors le fil AM, en ſe développant de-deſſus la demi-Cycloïde ACB & ſe renveloppant ſur ſon aſſociée

[a] Voilà donc une Courbe *rectifiée*, ou égale à une Ligne droite connue. Prenez garde cependant que cette *rectification* n'eſt point abſolue; parce qu'elle dépend de la ſuppoſition de l'égalité d'une autre Courbe à une Ligne droite, c'eſt-à-dire de l'égalité de la Baſe de la Cycloïde à la circonférence de ſon Cercle générateur; égalité que l'on ne ſçait pas déterminer géométriquement.

AE, décrite par ſon extrêmité M la *Cycloïde* entière BME, égale à la ſomme des deux *demi-Cycloïdes* AB, AE.

30. COR. IV. En ſuppoſant donc A le Point de ſuſpenſion d'un fil AM, tendu par un corps péſant à ſon extrêmité M, & les Courbes AB, AE, des Lames *Cycloïdales*; ſi l'on fait *oſciller* ce corps dans le plan de ces Courbes, il fera ſes *oſcillations* dans une *Cycloïde* BME.

31. REMARQ. Telles ſont les propriétés de la *Cycloïde*, qui ſervirent de fondement à l'immortelle découverte de M. *Huyghens*; lorſqu'il s'appliqua à rechercher les loix du mouvement d'un corps dans cette Courbe. Il trouva qu'un corps mû, en vertu de ſa péſanteur, dans une Cycloïde renverſée AFK (fig. 109) dont la Baſe AK eſt parallèle à l'horiſon, arrive toujours dans un même intervalle de tems au Point F le plus bas de cette Courbe; ſoit qu'il en parcoure un grand Arc, ſoit qu'il en décrive un petit. La démonſtration, que ce grand Géomètre en donna, eſt très-difficile. M. *de la Hire* tâcha dans ſa Mécanique [a] d'en produire une plus élégante; mais M. *Jean Bernoulli* y ayant remarqué un paralogiſme des plus inconteſtables, celui-ci en découvrit une très-ſimple, dont il me paroît pourtant néceſſaire d'expliquer les fondemens.

32. EXPOSITION *des Élémens, ſur leſquels eſt fondée la démonſtration de l'Iſochroniſme dans la Cycloïde.*

I. Si un corps commence à tomber des Points B, K, (fig. 109.) le long de la Courbe AFK; les viteſſes acquiſes à des Points quelconques C, H, au-deſſous des Points de partance B, K, ſeront entr'elles comme les racines quarrées des longueurs verticales, MP, LO, qui déſignent les hauteurs d'où le corps eſt tombé; c'eſt-à-dire que la viteſſe, acquiſe en C depuis le Point B, eſt à la viteſſe en H depuis le Point K, comme $\sqrt{MP}$ eſt $\sqrt{LO}$.

Effectivement l'expérience démontre qu'un corps qui

[a] Imprimée à Paris in-12. en 1695. Voyez en la page 421.

tombe, en vertu de ſa péſanteur, le long d'un plan incliné; acquière préciſément la même viteſſe a la fin de ce plan, que s'il tomboit par toute ſa hauteur verticale. Or une Courbe peut être regardée comme une ſuite de Plans, formant à leur rencontre des Angles ſi obtus, qu'ils équivalent à un ſeul Plan incliné de même hauteur que la Courbe. Mais on a vu (n°. 101 de la Parabole) que les hauteurs H, *h*, parcourues par un mobile, en vertu de ſa péſanteur, étoient entr'elles comme les quarrés des viteſſes VV, *uu*; ou que VV. *uu* :: H. *h*; donc V. *u* :: $\sqrt{H}$. $\sqrt{h}$; & par conſéquent ici, :: $\sqrt{MP}$. $\sqrt{LO}$.

II. Une Courbe AFK peut être partagée en parties CD ou HG ſi petites, que les viteſſes d'un mobile, acquiſes depuis les Points reſpectifs B, K, n'augmenteront point ſenſiblement, en parcourant les petites Lignes CD, HG. Car on peut les concevoir d'une petiteſſe ſi exceſſive, que le tems employé à les parcourir ſera moindre qu'une grandeur donnée quelconque; ainſi l'augmentation de viteſſe, pendant ce tems, pourra être regardée comme nulle rélativement à la viteſſe acquiſe précédente; c'eſt-à-dire, que cette viteſſe acquiſe peut être cenſée uniforme, durant le tems que le mobile paſſera une des petites Lignes CD, enſorte que la viteſſe du mobile n'augmente qu'à la fin de chaque Portioncule de la Courbe, & nullement pendant le trajet de cette Portioncule. Ce que l'on concevra très-aiſément, en imaginant que la péſanteur ne réïtère ſes coups ſur le mobile qu'à des intervalles très-petits: moyennant quoi la viteſſe ſe conſerve uniforme pendant chaque petit intervalle; quoi qu'après chacun d'eux elle reçoive une augmentation par les redoublemens de la peſanteur.

III. Dans le mouvement uniforme, quand les viteſſes V, *u*, ſont entr'elles comme les eſpaces E, *e*, parcourus, les tems T, *t*, employés à parcourir ces eſpaces, ſont néceſſairement égaux. Car on a la viteſſe d'un mobile, en diviſant l'eſpace E parcouru, par le tems T employé à le par-

courir ; c'eſt-à-dire que $V = \frac{E}{T}$, & $u = \frac{e}{t}$: mais (ſupp.) $V. u :: E. e$; donc $\frac{E}{T}. \frac{e}{t} :: E. e$; ainſi $\frac{Ee}{T} = \frac{Ee}{t}$. Donc (en multipliant par Tt, & diviſant enſuite par Ee) $t = T$.

33. PROP. VI. Un corps qui ſe meut, en vertu de ſa peſanteur, dans une *Cycloïde* renverſée, (fig. 109), dont la Baſe AK eſt parallèle à l'horiſon, décrit la *demi-Cycloïde* KF dans le même tems qu'il en parcourt un Arc quelconque BF plus petit ; c'eſt-à-dire, qu'un mobile mû dans une Cycloïde, arrive toujours dans un même intervale de tems, au Point F le plus bas de cette Courbe ; quoiqu'il commence à tomber de différentes hauteurs. Et c'eſt ce qu'on entend, quand on dit que *les vibrations ou oſcillations d'un Pendule dans une Cycloïde ſont iſochrones ou d'égale durée.*

DÉMONSTRATION *de l'Iſochroniſme dans la Cycloïde.* I. Concevez que l'on ait diviſé l'Arc BF en un très-grand nombre de Portioncules égales CD ; &, pour aider l'imagination, ſoit $CD = \frac{1}{100}$ de BF ; enſorte que $BF = 100\,CD$. Concevez auſſi la *demi-Cycloïde* KF, diviſée dans le même nombre de parties égales que l'Arc BF ; tellement que HG ſoit $\frac{1}{100}$ de KF, ou que $KF = 100\,HG$. Suppoſons encore que CD ſoit la trentième portioncule des parties de BF, en commençant à compter du Point B ; & que pareillement HG ſoit la trentième Portioncule de KF, à compter du Point K. Alors $BC = 29\,CD$, & $CF = 71\,CD$: De même $KH = 29\,HG$, & $HF = 71\,HG$. Donc, puiſque $100\,HG. 100\,CD :: 71\,HG. 71\,CD$, on a $KF. BF :: HF. CF$, ou $KF. HF :: BF. CF$. Pareillement $71\,CD. 71\,HG$, ou $CF. HF :: CD. HG$.

II. Menons maintenant les Ordonnées CP, HO, BM, & les cordes FS, FR, FT. Après quoi conſidérons qu'ayant (art. 1.) $KF. HF :: BF. CF$, nous aurons $FL. FT :: FR. FS$, parce que les cordes du Cercle générateur, ſont toujours

les moitiés des Arcs Cycloïdaux correſpondans (27). Donc $\overline{FL}^2 . \overline{FT}^2 :: \overline{FR}^2 . \overline{FS}^2$ (A); or (n°. 292 *Inſt. T.* 2.) $\overline{FT}^2 = FL \times FO$; $\overline{FR}^2 = FL \times FM$; $\overline{FS}^2 = FL \times FP$; ainſi l'équation A peut devenir $\overline{FL}^2 . FL \times FO :: FL \times FM . FL \times FP$; ou (en diviſant par FL) $FL . FO :: FM . FP$; donc $FL - FO . FO :: FM - FP . FP$, ou $LO . FO :: MP . FP$; donc $FP . FO :: MP . LO$. Ainſi $\sqrt{FP} . \sqrt{FO} . \sqrt{MP} . \sqrt{LO}$. :: (art. 1. du n°. 32.) la viteſſe acquiſe en C depuis le Point B, eſt à la viteſſe acquiſe en H depuis le Point K.

III. Mais (n°. 292. *Inſt. T.* 2.) $FP . FS :: FS . FL$; donc $FP = \frac{\overline{FS}^2}{FL}$; & par la même raiſon, $FO = \frac{\overline{FT}^2}{FL}$. Par conſéquent $FP . FO :: \overline{FS}^2 . \overline{FT}^2$, ou $\sqrt{FP} . \sqrt{FO} :: FS . FT :: CF . HF$ (27) :: CD. HG (art. 1.); donc CD. HG. :: $\sqrt{FP} . \sqrt{FQ}$ :: (art. II.) $\sqrt{MP} . \sqrt{LO}$ :: la viteſſe acquiſe en C eſt à la viteſſe acquiſe en H. Par conſéquent, la viteſſe acquiſe en C. depuis B, eſt à la viteſſe acquiſe en H depuis K, comme CD eſt HG. Mais (art. II. du n°. 32) ces viteſſes acquiſes ſont uniformes pendant le trajet des eſpaces CD, HG, exceſſivement petits; donc (art. III. du n°. 32) les tems employés à parcourir ces Portioncules de la Courbe, ſont égaux. Donc la ſomme des CD, c'eſt-à-dire, tout l'Arc BF eſt parcouru en même tems que la ſomme des HG, ou que la *demi-Cycloïde* entière KF. C. Q. F. D.

34. USAGE *de la Cycloïde dans la conſtruction des Horloges à Pendule.* On ſçait qu'une Horloge eſt une machine, dont on ſe ſert pour meſurer le tems. C'eſt un aſſemblage de roues qui ſe communiquent le mouvement imprimé à la première, par un poids ſuſpendu à ſon Axe ou Tambour. Si ce mouvement n'eſt pas uniforme, il ne ſera pas poſſible de ſe régler deſſus; & s'il paſſe trop vîte, l'obligation de remonter ſouvent la machine deviendra incommode. Voilà donc une néceſſité de mettre, dans une Horloge,

une pièce qui en arrête ou modère le mouvement à des intervalles réglés.

On parviendroit évidemment à cette fin, en opposant à la dernière roue un obstacle, qui céderoit & résisteroit alternativement à l'impulsion de ses dents. Or un Pendule attaché à la verge, poussée par cette dernière roue, produiroit cet effet. Car les dents de la roue rencontrans celles de la verge, c'est-à-dire, en termes d'Art, les *Palettes*, feront tourner cette verge, & passeront; mais le poids du Pendule ramènera les Palettes, & par conséquent la roue sera repoussée de nouveau, ou tout au moins son mouvement ralenti; & ainsi de suite, pendant toute la durée du mouvement de la machine. Par conséquent le Pendule est utile pour modérer son action.

Mais l'uniformité du mouvement est ce qu'il y a de plus important dans une Horloge. Quelque perfection que l'Ouvrier puisse donner à chacune de ses pièces, l'irrégularité de leur matière & celle des frottemens, feront que les roues ne pousseront pas, à chaque instant, avec une égale force [a]. Moyennant quoi, à chaque impulsion, les oscillations du Pendule seront inégales, & l'expérience a démontré que des oscillations circulaires inégales, se faisoient en des tems inégaux. Le Pendule, mû circulairement, ne ramène donc pas, en tems égaux, les Palettes du balancier contre les dents de la roue de rencontre. Chaque dent passe tantôt plus vîte & tantôt plus lentement. Ce qui ne donne pas le mouvement uniforme que l'on se propose.

Toutes ces irrégularités ne subsisteroient plus, si le Pendule, poussé plus ou moins fort, étoit toujours ramené en tems égal. Or nous avons vu (33) qu'en oscillant dans une

[a] Peut être aussi que le poids, premier mobile, accélère son mouvement. Ayant consulté là-dessus un homme du métier, il m'a assuré que ma conjecture devoit être vraie, parce qu'il avoit observé constamment qu'une Pendule bien réglée, alloit sensiblement plus vîte, lorsque le poids étoit descendu considérablement; & qu'il avoit fauvé cet inconvénient, en remontant la machine plus souvent qu'à l'ordinaire.

Cycloïde ; tous les retours ſont *iſochrones* ou d'égale durée ; par conſéquent la Cycloïde paroît merveilleuſement propre, pour donner au mouvement des Horloges toute l'uniformité, que l'art des hommes peut obtenir.

35. Pour faire comprendre maintenant, à ceux qui ne ſont pas du métier, ou qui n'ont jamais examiné le mouvement d'une Horloge, comment le Pendule, adapté au balancier de cette machine, peut ſe mouvoir dans une Cycloïde, reprenons la fig. 108. Suppoſons que le Point A ſoit l'extrêmité du *Balancier*, c'eſt-à-dire, d'une verge horiſontale qui ſe balance ſur ſon Axe, par l'impulſion des dents de la dernière roue, appellée pour cet effet *roue de rencontre* ; que cette même extrêmité ſoit le Point de ſuſpenſion du Pendule AM, compoſé de deux parties, dont l'inférieure SM eſt inflexible, & la ſupérieure AS eſt fléxible, comme un fil, une petite chaîne ou une lame de métail très-mince ; qu'à quelques Lignes du Point de ſuſpenſion A, ſoit attachée fixement ſur le balancier une eſpèce d'équerre, que l'on nomme *Fourchette*, dont une des branches tombe verticalement, ce qui rend la poſition de l'autre horiſontale ; que cette branche horiſontale ſoit évuidée dans preſque toute ſa longueur, pour y laiſſer paſſer la partie inflexible du Pendule ; & qu'enfin aux deux côtés du Point A, ſoient deux Lames AE, AB, courbées en Arcs de Cycloïde, dont l'Axe BD ou AR ſoit la moitié du Pendule AM.

Il eſt clair, par cette conſtruction, que les dents de la roue de rencontre, venant à pouſſer les Palettes du balancier, feront tourner cette verge ſur ſon Axe ; la Fourchette entraînée par ce mouvement, emportera avec elle la partie inflexible du Pendule, engagée dans ſa branche horiſontale ; elle ſera donc ſuivie de la partie fléxible, laquelle rencontrant une des lames Cycloïdales ſe pliera, ou s'enveloppera deſſus. Mais, à l'inſtant que la roue de rencontre ceſſera d'agir contre les Palettes du balancier, le Pendule deſcendra par ſon propre poids, & paſſant au-delà

de la verticale AM, ſera renveloppée ſa partie flexible ſur l'autre Cycloïde AB ; & ainſi de ſuite pendant toute la durée de ſes oſcillations. Si l'on ſe rappelle à préſent les n°. 29 & 30, on verra que l'extrémité M d'un pareil Pendule ſera forcée de décrire une *Cycloïde* ou une portion de *Cycloïde* ; & que par conſéquent ſes oſcillations, grandes ou petites, ſeront toutes *iſochrones* ou d'égale durée (33).

35. Comme il eſt fort difficile de plier exactement des lames en Arcs de Cycloïde, & que la partie flexible du Pendule Cycloïdal, eſt ſujette à des variations de la part de l'Air, cette admirable invention, reçue d'abord avec un applaudiſſement général, a été abandonnée. On en eſt revenu au Pendule circulaire. Mais une découverte qui ne réuſſit pas en tout, eſt toujours bonne en partie. On a obſervé que de petites oſcillations circulaires, qui ſe faiſoient, par exemple, dans des Arcs de 3 ou 4 dégrés, ſe confondoient ſenſiblement avec celles d'une Cycloïde. Par conſéquent, ſi ces dernières ſont d'égale durée, il eſt néceſſaire que les circulaires le ſoient auſſi. Effectivement l'expérience démontre tous les jours qu'avec cette attention, l'on a des Pendules d'une juſteſſe, que l'on ne conçoit guères ſuſceptible d'une plus grande perfection. Et nous en ſommes redevables à une Courbe, ſur laquelle on ne devoit pas, ce ſemble, fonder de grandes eſpérances ; ainſi qu'on en peut juger par cette courte hiſtoire de la *Cycloïde*.

Hiſtoire de la Cycloïde.

La deſcription de cette Courbe eſt perpétuellement devant nos yeux, & néanmoins on n'en trouve pas le moindre veſtige chez les Anciens. Le P. *Merſenne*, l'un des hommes en France qui a le plus contribué aux progrès des hautes Sciences, a remarqué le premier qu'elle exiſtoit dans la nature. En allant par les rues de *Nevers*, en 1615, ſes yeux ſe fixèrent ſur un clou de l'une des roues d'une voiture roulante. Il fit réflexion que le mouvement de ce clou

étoit composé de deux mouvemens simultanés, l'un en avant, & l'autre autour de l'aissieu de la rouë; que par conséquent l'un de ses Points devoit décrire en l'Air une Ligne, qui n'étoit ni droite ni circulaire. Il s'appliqua là-dessus à en rechercher la nature, mais sans aucun succès. Ayant repris ses spéculations sur cette Courbe en 1634, il fit part de ses difficultés à M. de *Roberval*, qui lui en donna la solution. Il s'agissoit d'abord de trouver le rapport de l'espace de la *Cycloide* à celui de son Cercle générateur. M. de *Roberval* trouva que le premier étoit au second comme 3 est à 1. Mais il fut arrêté au Problême de sa Tangente, dont M. *Descartes* donna le premier la Méthode en 1638. Après cela on dût à M. *Wren*, Anglois, la rectification de cette Courbe, par où l'on sçait qu'elle est quadruple de son Axe. Et c'est principalement sur cette propriété que M. *Huygens* de Zuitlichem, Hollandois, fonda sa démonstration de l'isochronisme dans la *Cycloide*. Il en publia la découverte en 1673 dans son *Horologium oscillatorium*; Ouvrage si plein de génie, que de l'aveu même des plus habiles dans l'Art des Horloges, ce noble Mathématicien a plus contribué à la perfection de ces admirables machines, que tous ses prédécesseurs & ceux qui lui ont succédé jusqu'à notre tems [a].

[a] Voyez *Baillet*, Vie de *Descartes*, & Pascal *Historia Cycloidis*.

FIN.

De l'Imprimerie de BALLARD, seul Imprimeur du Roi pour la Musique, & Noteur de la Chapelle de Sa Majesté, rue S. Jean-de-Beauvais. 1750.

APPROBATION.

J'Ai lû par l'ordre de Monſeigneur le Chancelier un Manuſcrit qui a pour titre : *Traité des Sections Coniques & des autres Courbes anciennes, appliquées ou appliquables à la pratique des Arts, &c.* par M. de la Chapelle, Cenſeur Royal, & Membre de la Société Royale de Londres. Cet Ouvrage m'a paru compoſé avec beaucoup d'ordre & de clarté, & j'ai jugé que l'application qu'il en a faite aux Arts, en rendroit l'impreſſion utile & agréable au Public. A Paris ce, 26 Mai 1750.

CASSINI.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlemens, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra : SALUT. Notre amé le Sr DE LA CHAPELLE, de la Société Royale de Londres, & Cenſeur Royal, Nous ayant fait expoſer qu'il déſiroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage de ſa compoſition qui a pour titre : *Traité des Sections coniques & autres Courbes anciennes, appliquées ou appliquables à la pratique des Arts, &c.* s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilége ſur ce néceſſaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer le dit Ouvrage en un ou pluſieurs Volumes, autant de fois que bon lui ſemblera, & de le faire vendre

& débiter par tout notre Royaume pendant le terme de douze années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangère dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mil livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts: A la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles: que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beau caractère, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modèle sous le contre-scel des Présentes; que l'impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dixiéme Avril mil sept cens vingt-cinq; qu'avant de l'exposer en vente le Manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit Ouvrage, sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, le Sieur D'AGUESSEAU, Chancellier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, le Sieur D'AGUESSEAU, Chancellier de France, le tout à peine de nullité des Présentes: Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans causes, pleinement

& paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement : Voulons que la Copie des Préſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, ſoit tenue pour dûement ſignifiée, & qu'aux Copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers & Secretaires, foi ſoit ajoutée comme à l'Original : Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent de faire pour l'éxécution d'icelles tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris le douziéme jour du mois de Juin, l'an de grace mil ſept cens cinquante ; & de notre Règne le trente-cinquiéme. Par le Roi en ſon Conſeil.

Signé, SAINSON.

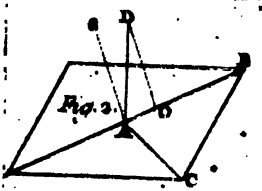


Fig. 2.

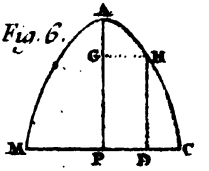


Fig. 6.

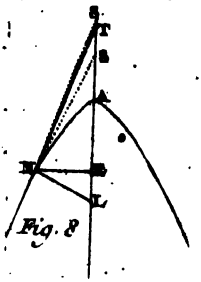


Fig. 8

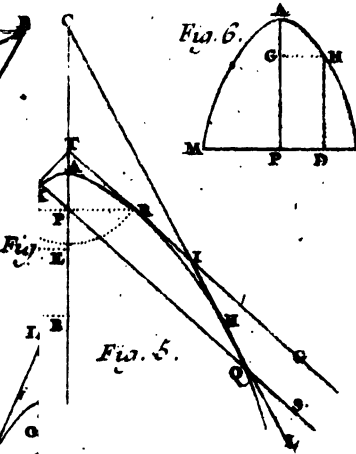
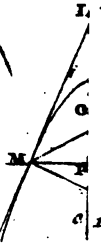


Fig. 5.



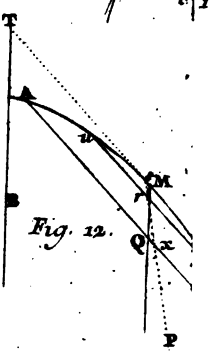
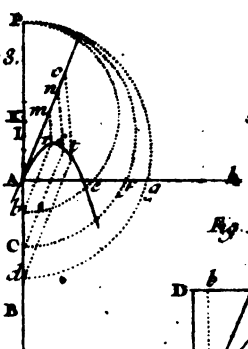


Fig. 12.



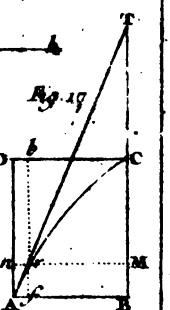


Fig. 19

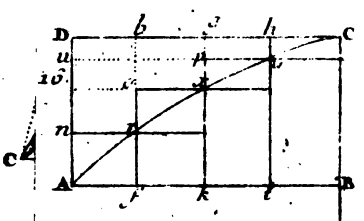
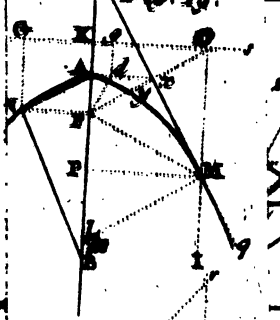
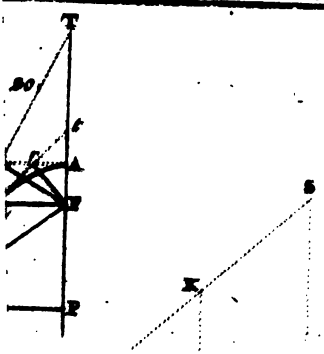
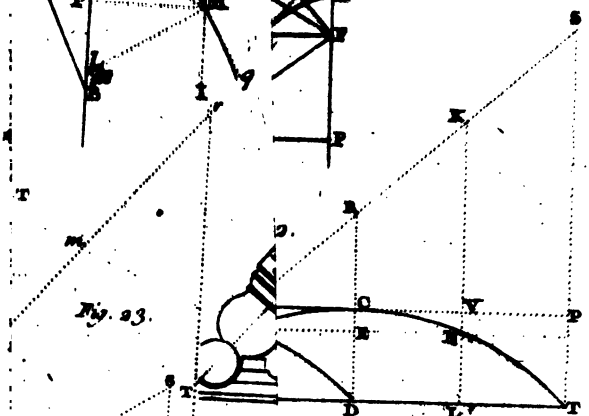
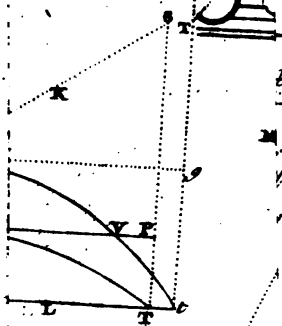


Fig. 23.









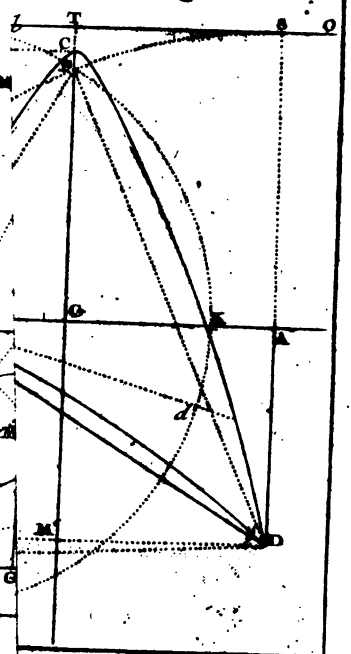
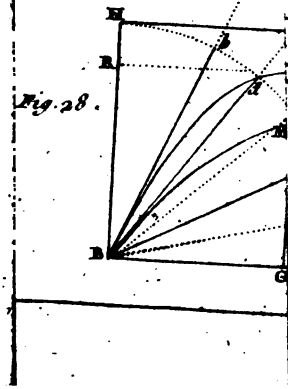
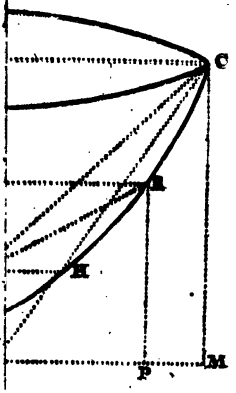


Fig. 28.





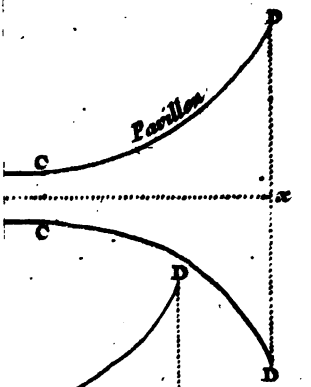
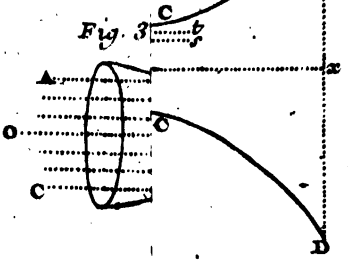
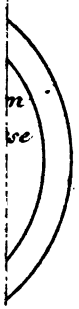


Fig. 3





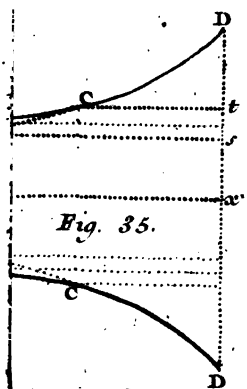
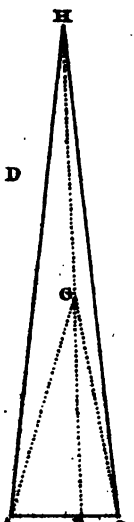


Fig. 35.

Fig. D



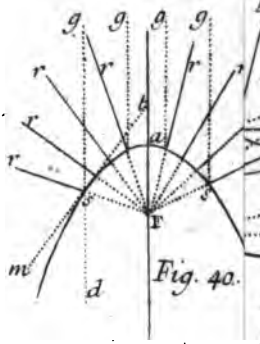


Fig. 40.

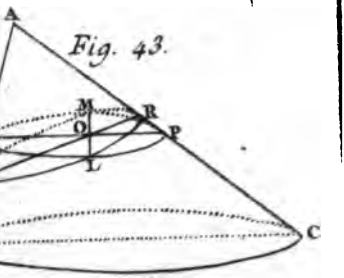


Fig. 43.

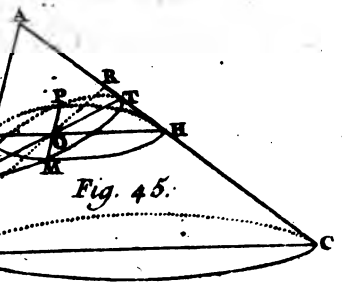


Fig. 45.

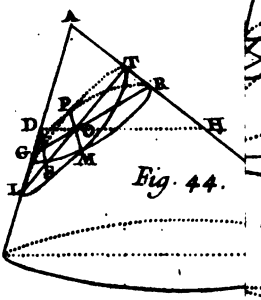


Fig. 44.

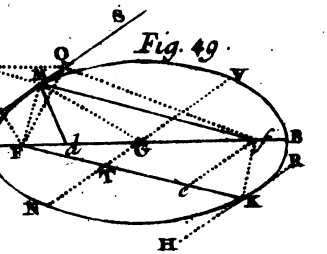


Fig. 49.

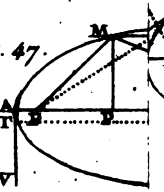
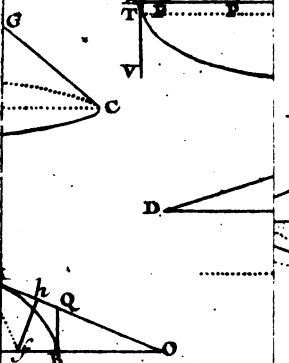


Fig. 47.



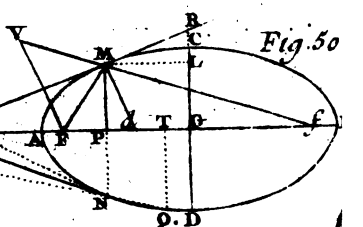


Fig. 50

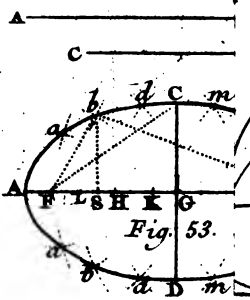
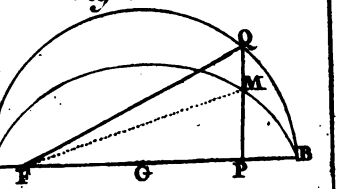


Fig. 55.



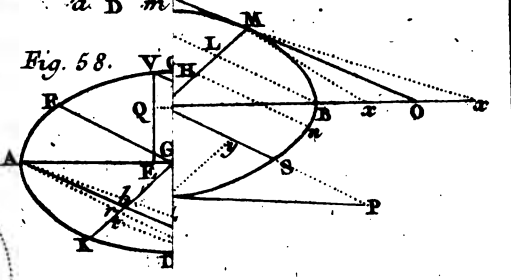


Fig. 58.

Fig. 64.

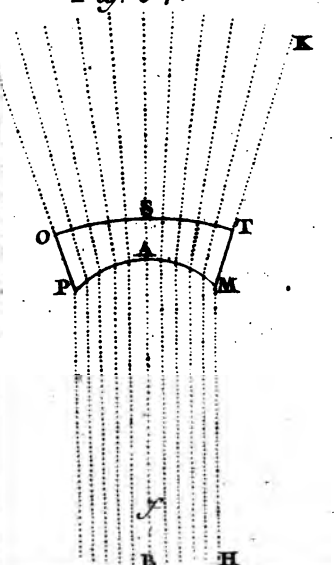
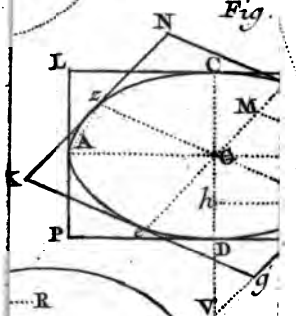
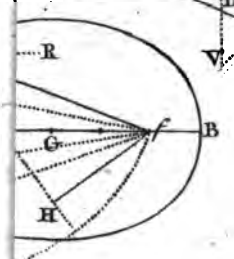


Fig.





UNIV. OF WASH.

Pl. VI.

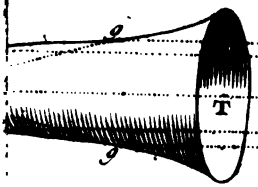
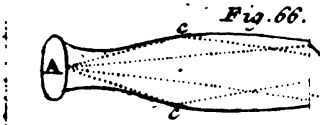
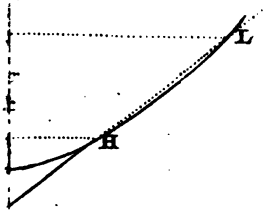


Fig. 66.





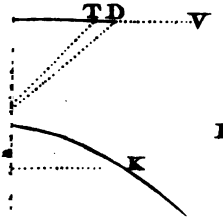
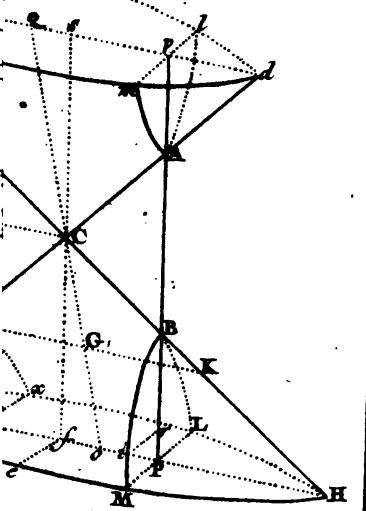


Fig. 69.



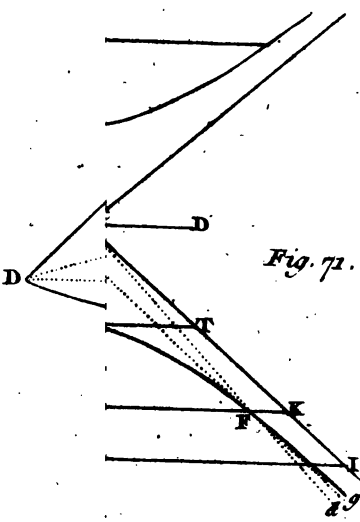


Fig. 71.

Herisset Sculp.

Fig. 75

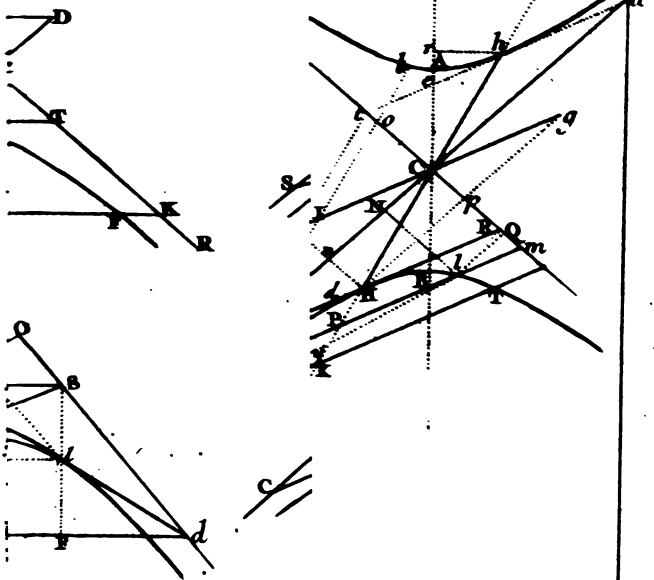


Fig. 80

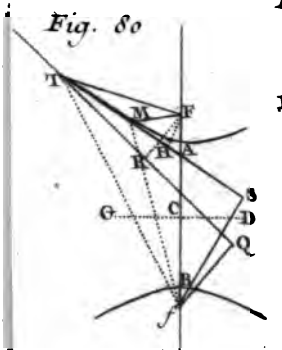
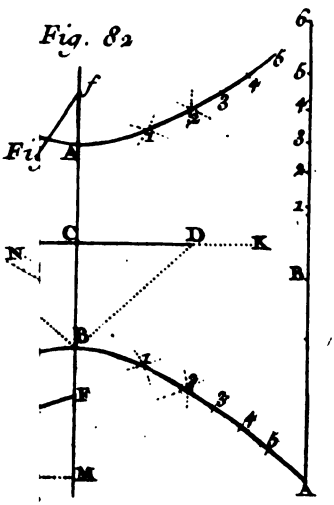
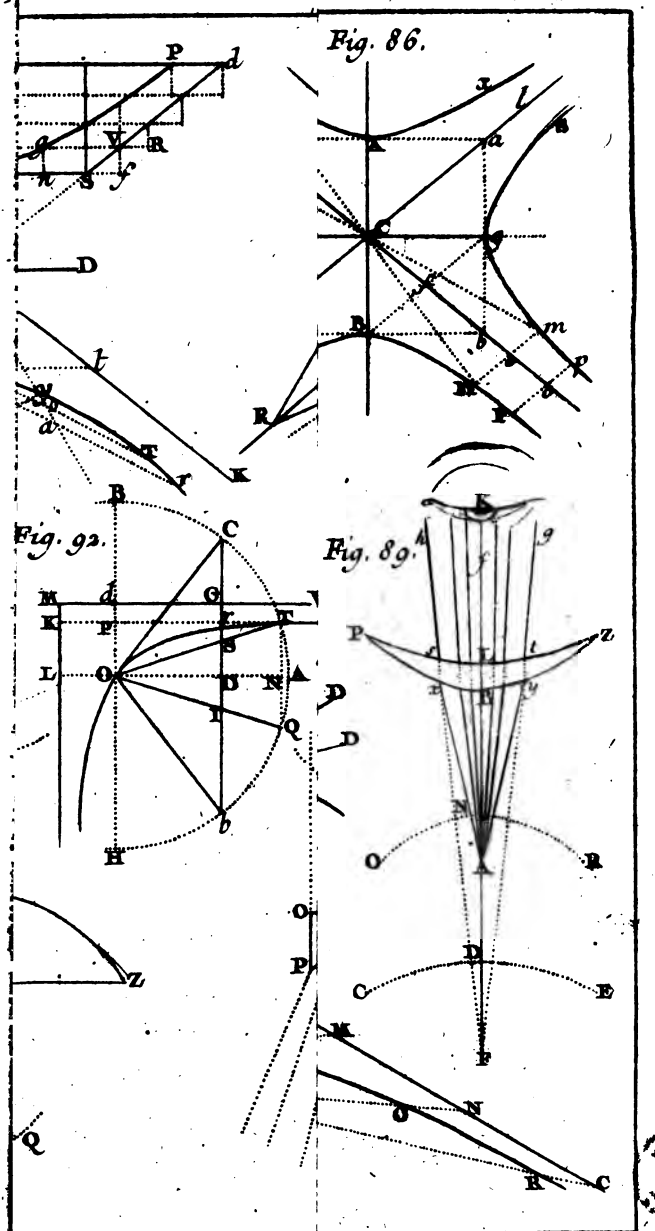


Fig. 82

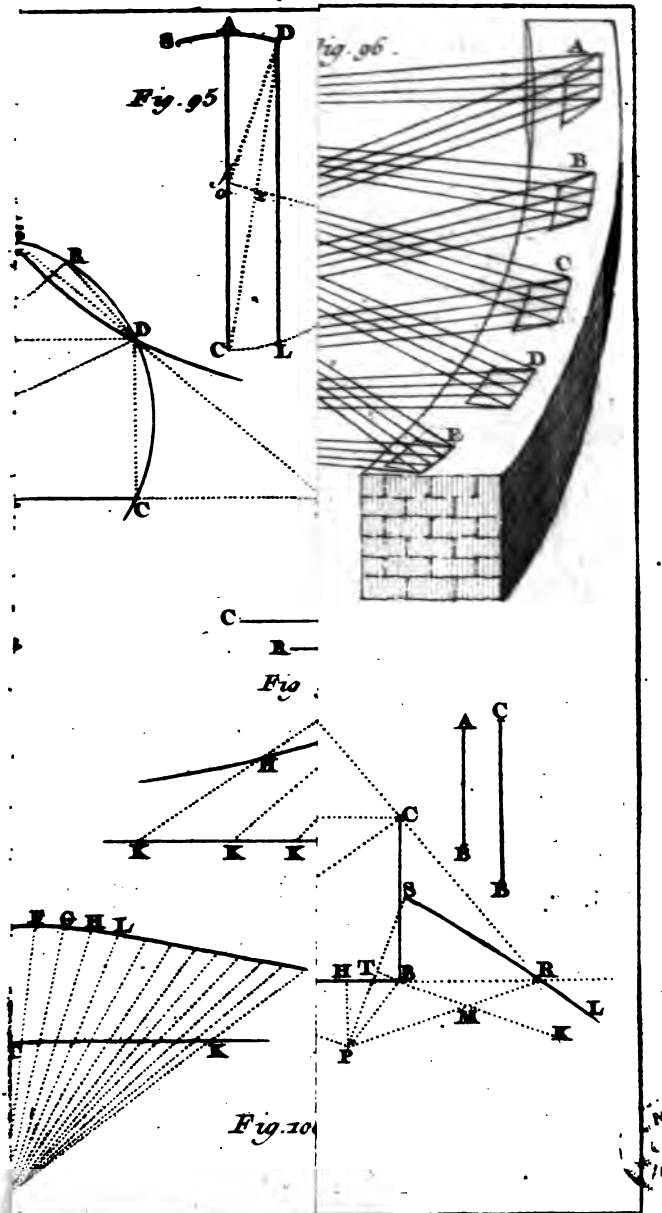


Herisset Sculp.

Pl. VIII.

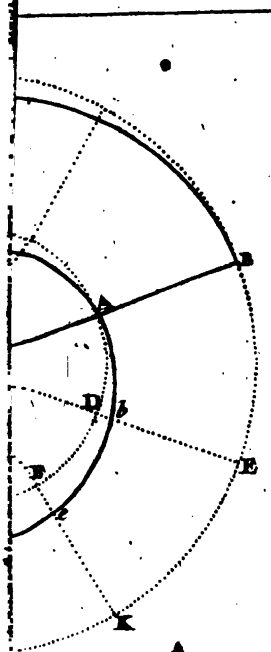


Herisset Sculp.



Herisset Sculp

Pl. X



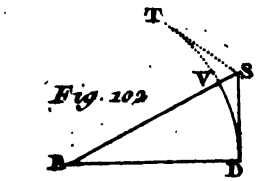
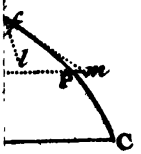
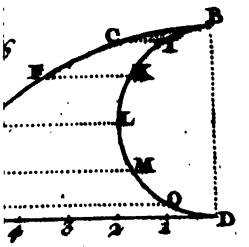


Fig. 102





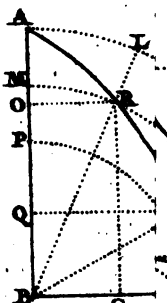


Fig. 101.

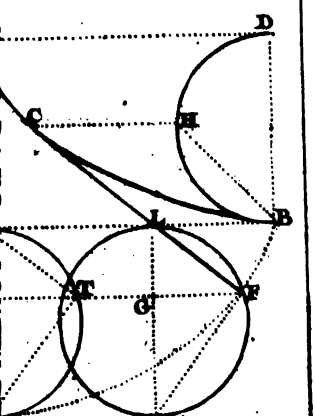
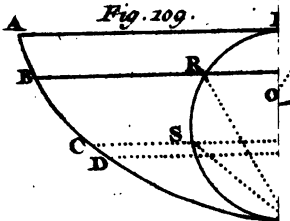


Fig. 209.



Herisset Sculp.